1.8_1.9 Linjära Avbildningar

En avbildning från $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$ är en hopparning av en element från $\mathbb{R}^n$ med ett unikt element i $\mathbb{R}^m$. Det betecknas $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. $\mathbb{R}^n$ kallas definitionsmängd och $\mathbb{R}^m$ kallas vardemängd.

Matrisavbildning

En matrisavbildning är en avbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definierad av $T(v) = Av$ där A är en $m \times n$ - matris

Ex: 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $T(v) = Av$ där $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Om $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow T(v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. Bestäm om $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är i värdemängden av T. (T given i 1.)

u är i värdemängden av T om det finns $v \in \mathbb{R}^2$ så att

$T(v) = u$, d s. $Av = u$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 & -1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) -1 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

olösbar $\Rightarrow u \notin$ värdemängd av T.

Linjära avbildningar

En avbildning T är linjär om:

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$ för alla u, v i T:s definitionsmängd
2. $T(cu) = cT(u)$ för alla skalär c och u i T:s definitionsmängd

Ex: En matristransformation är en linjäravbildning eftersom $A(u+v) = Au + Av$

och $A(cu) = cA(u)$.

Sats: T är en linjär avbildning omm:

1. $T(0) = 0$

2. $T(cu+v) = cT(u) + T(v)$ för alla skalär c och vektorer u, v i T:s definitionsmängd.

Ex: Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definierad av:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad T(v) = \begin{pmatrix} x+y-1 \\ 2x \end{pmatrix}$$

T är inte en linjär avbildning eftersom $T(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

Ex: Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning och

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Beräkna $T\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Kan man beräkna $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$?

Lösning: 1. $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4e_1 + 3e_2$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = T(4e_1 + 3e_2) = 4T(e_1) + 3T(e_2)$$
$$= 4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

2. $$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= xe_1 + ye_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(xe_1 + ye_2) = xT(e_1) + yT(e_2)$$
$$= x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sats: Låt $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Det finns en entydigt matris A så att $T(v) = Av$ för alla v i $\mathbb{R}^n$. A är definierad som

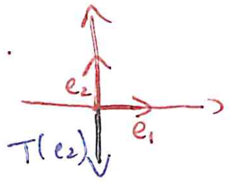
$$A = \big(T(e_1) \,|\, T(e_2) \,|\, \dots \,|\, T(e_n) \big)$$

där $\{e_1, \dots, e_n\}$ är standard bas till $\mathbb{R}^n$.
Matrisen A kallas standardmatrisen till linjär avbildning T.

Ex: Bestäm standardmatrisen till följande linjära avbildningar.

1. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, där T är en spegling över x-axeln.
2. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, där T är en spegling över y-axeln.
3. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, där T är en spegling genom origo
4. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, där T är en vridning av vinkel φ.
5. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ där T är en projektion på x-axeln.

Lösning: 1.

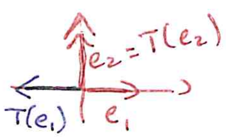


$T(e_1) = e_1$

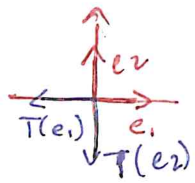
$T(e_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ standardmatrisen är $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

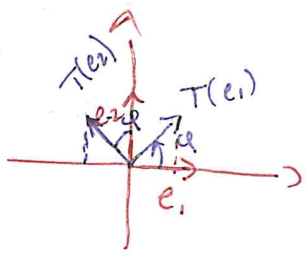
2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



3. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



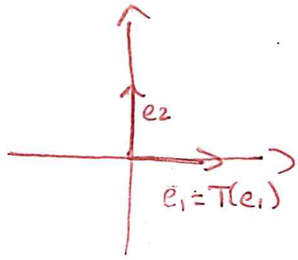
4.



$T(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ $\quad T(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ standardmatrisen är $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

5.



e_1 är på x-axeln, alltså är $T(e_1) = e_1$.

e_2 är vinkelrät mot x-axeln, alltså är projektion på x-axeln nollvektorn $\Rightarrow T(e_2) = 0$

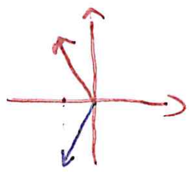
$\Rightarrow$ standardmatrisen $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ex: Beräkna $T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ där T är:

1. en spegling över x-axeln
2. en vridning av vinkel $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Läsning: 1. standardmatrisen av en spegling över x-axeln är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



2. Standardmatrisen av en vridning av vinkel $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ är

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{3\pi}{4} & -\sin\frac{3\pi}{4} \\ \sin\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$