Kapitel 2 Matriser

Låt A vara en mxn-matris (m rader och n Kolumner).

(mxn) Kallas matris storlek. En element i rad i och Kolumn j betecknas a_{ij}, där i är radindex och j är kolumnindex.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $a_{12} = -1$, $a_{32} = 2$

Def: * Om $m = n$, kallas matrisen en Kvadratisk matris.

* Diagonalen av en Kvadratisk matris är följden av elementen a_{ii}
* Nollmatrisen är matrisen som är fylld med nollor, och och betecknas 0.
* Enhetsmatrisen är en Kvadratisk matris med 1:or på diagonalen och 0:or på övriga positioner. Den betecknas I_n om det är en nxn-matris.

Räkneoperationer för matriser

. Två matriser är lika om de har samma storlek och de motsvarande element är lika.

Addition: Summan av två matriser är den matris man får om man summerar elementen i motsvarande positioner i matriserna. För att summan ska vara definierad måste matriserna ha samma storlek.

Ex:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ ej definierad.

Multiplikation med en skalär

Då man multiplicerar en matris med ett tal så multiplicerar man alla element i matrisen med talet.

Ex:
$$-2\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&0&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-2&-6\\2&0&2\\-2&2&-4\end{pmatrix}$$

Ex: $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$

$$2A-3B=2\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3\\4&2\end{pmatrix}$$

Räkneregler: Låt A, B, C vara tre matriser med samma storlek.

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $A+0=A$
4. $c(A+B)=cA+cB$
5. $(c+d)A=cA+dA$ $\quad (c,d\in\mathbb{R})$
6. $c(dA)=(cd)A$

Matrismultiplikation

Låt A vara en $m\times n$-matris och B en $n\times p$-matris med kolumner $b_1, b_2, \ldots, b_p$. Produkten AB är $m\times p$-matrisen vars kolumner är $Ab_1, Ab_2, \ldots, Ab_p$.

$$AB=A(b_1\ b_2\ \cdots\ b_p)=(Ab_1\ \ldots\ Ab_p)$$

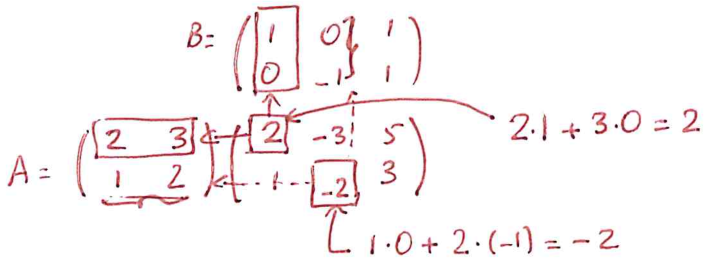
Ex: $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\\underbrace{0}_{b_1}&\underbrace{-1}_{b_2}&\underbrace{1}_{b_3}\end{pmatrix}$

AB:
$$Ab_1=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$
$$Ab_2=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$$
$$Ab_3=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow AB=\begin{pmatrix}2&-3&5\\1&-2&3\end{pmatrix}$$

Anmärkning: För att produkten AB ska vara definierad måste antalet kolumner av A vara lika med antalet rader av B.

Elementet i produkten AB som ligger på rad i och kolumn j kan skrivas

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$



Räkneregler: Då operationerna är definierad gäller:

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B+C) = AB + AC$
3. $(B+C)A = BA + CA$
4. $r(AB) = (rA)B = A(rB)$, r skalär
5. $I_m A = A = A I_n$ där I_m och I_n är enhetsmatriser

$$I_m = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{m \text{ kolumner.}}$$

Anmärkning

1. AB och BA behöver inte vara lika.
   (Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ och $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$)

   Om $AB = BA$ säger man att A och B kommuterar.
2. $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ eller $B = 0$
3. $AB = AC \not\Rightarrow B = C$

Transponering

Låt A vara en $m \times n$-matris. A:s transponat är den $n \times m$-matris man får då raderna skrivs som kolumner. Det betecknas A^T.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Räkneregler: A, B matriser, r skalär.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(rA)^T = rA^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Matrisinvers

Matrisinversen är definierad för kvadratiska matriser.

Def: En matris B är invers till matrisen A om $\boxed{AB = BA = I}$

Om sådan matris finns säger man att A är inverterbar, och i så fall, inversen är unik och det betecknas A^{-1}.

$$(A^{-1}A = AA^{-1} = I).$$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ och $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Alltså $B = A^{-1}$.

Beräkning.

2x2-matriser: Låt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en 2×2-matris

. Om $ad - bc \neq 0$ så är A inverterbar och

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

. Om $ad - bc = 0$ så är inte A inverterbar.

$ad - bc$ kallas determinant av A och betecknas $\det A$.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\det A = 2\cdot(-2) - 1\cdot(-4) = -4+4 = 0$ ej inverterbar

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\det B = 2.3 - (-1).1 = 7 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Sats: Om A är en inverterbar $n\times n$-matris så har ekvationen $Ax=b$ entydig lösning för varje b i $\mathbb{R}^n$.

Bevis. Låt $b\in\mathbb{R}^n$, och låt $x=A^{-1}b$, så:

$$Ax=A(A^{-1}b)=(AA^{-1})b=Ib=b$$

Alltså x är en lösning till ekvationen $Ax=b$.

Vi visar nu att x är en entydig lösning. Anta att u är en annan lösning, Vi vill visa att $u=x$.

$$u=\underbrace{(A^{-1}A)}_{I}u=A^{-1}(\underbrace{Au}_{b})=A^{-1}b=A^{-1}(Ax)=\underbrace{(A^{-1}A)}_{I}x=Ix=x.$$

Ex: Låt $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

1) Visa att A är inverterbar och beräkna A^{-1}.

2) Lös ekvationen $Ax=b$ där $b=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$

Lösning: 1) $2\cdot 1-1\cdot(-1)=2+1=3\neq 0 \Rightarrow A$ är inverterbar.

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

2) $$Ax=b \Leftrightarrow x=A^{-1}b=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\left(-1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\ 5/3\end{pmatrix}$$

Sats 1. Om A är inverterbar så är A^{-1} inverterbar och $(A^{-1})^{-1}=A$

2. Om A och B är inverterbara $n\times n$-matriser så är AB och BA inverterbar och $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ och $(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$.

3. Om A är inverterbar så är A^T inverterbar och $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

Inversen av en 3x3-matris

Låt A vara en 3×3-matris. För att beräkna A:s invers, reducerar ma totalsmatrisen $(A\,|\,I)$ genom att använda Gauss-Jordan metod. Om $(A\,|\,I)$ är rad ekvivalent till en matris $(I\,|\,B)$ så är A inverterbar och $A^{-1}=B$.

Ex: Avgör om $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ är inverterbar. I så fallet beräkna inversen A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\text{byta rader}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\2&1&1&0&1&0\\1&-2&-1&1&0&0\end{array}\right)(-2)\ (-1)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&1&0&1&-2\\0&2&-1&1&0&-1\end{array}\right)(-2)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&1&0&1&-2\\0&0&-3&1&-2&3\end{array}\right)\div -3$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&1&0&1&-2\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-1\end{array}\right)(-1)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-1\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-1\end{array}\right)=(I\,|\,A^{-1})$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{I}$$

Alltså A är inverterbar och $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-1\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-1\end{pmatrix}$.