Föreläsning 1

21-01-19

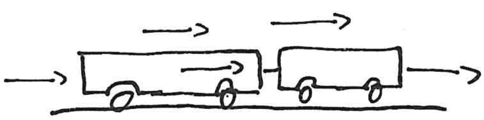
12.2 Vektorer

En vektor är ett geometriskt objekt som har <u>storlek</u> och <u>riktning</u>. Det används för att ange t.ex. hastighet, acceleration, Kraft, Kraftmoment, ...

En vektor illustreras som pilar

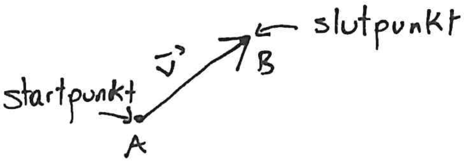
och betecknas med en bokstav i fetstil (**v**) eller en bokstav med en pil ovanför sig ($\vec{v}$).

Vektorer som har samma storlek och samma riktning Kallas <u>ekvivalenta</u> (eller <u>lika</u>). Dvs att det inte är viktigt var man ritar en vektor. Till exempel, om man vill rita ut hastigheten hos ett tåg kan man välja vilken punkt som helst i grafen.



Om vektorn $\vec{v}$ placeras i punkten A och har B som slutpunkt (se figuren nedan) Kan man skriva

$\vec{v} = \vec{AB}$

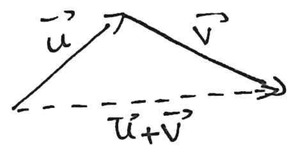


Storlek: Storleken av en vektor $\vec{v}$ är längden av $\vec{v}$. Den kallas också norm av $\vec{v}$ och betecknas $\|\vec{v}\|$.

Nollvektorn: Nollvektorn är vektorn som har storlek 0 och saknar riktning. Den betecknas $\vec{0}$.

Enhetsvektor: En vektor med längd 1 kallas enhetsvektor.

Vektoraddition: Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två vektorer. Om $\vec{v}$ är placerad så att dess startpunkt är $\vec{u}$:s slutpunkt, kan $\vec{u}+\vec{v}$ ritas från u:s startpunk till v:s slutpunkt

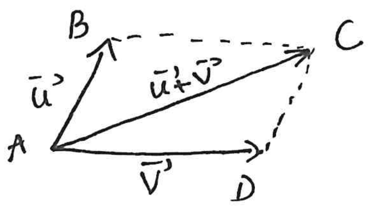


Om $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ så gäller att

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{(triangellagen).}$$

En alternativ beskrivning av vektoraddition:

Om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ placeras så att de har samma startpunkt, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, så är $\vec{u}+\vec{v}$ vektorn $\overrightarrow{AC}$ så att ABCD är en parallellogram.

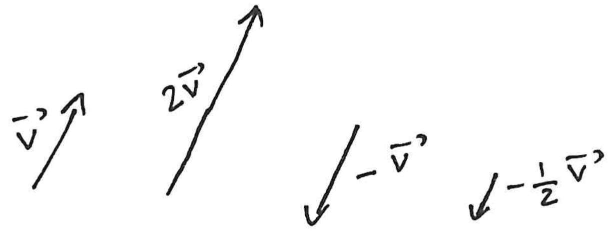


Multiplikation med en skalär

Om man multiplicerar en vektor $\vec{v}$ med en skalär c (ett reellt tal), får man en vektor vars storlek är lika med $|c| \cdot \|\vec{v}\|$ och vars riktning är samma som $\vec{v}$ om $c > 0$ eller motsatt riktning till $\vec{v}$ om $c < 0$.

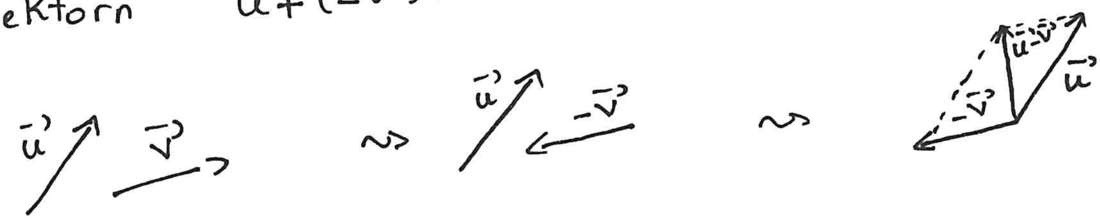
(Om $c = 0$, $c\vec{v} = \vec{0}$).

Ex:

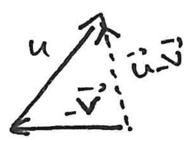


Vektorsubtraktion

Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två vektorer. Differensen $u - v$ är vektorn $\vec{u} + (-\vec{v})$.



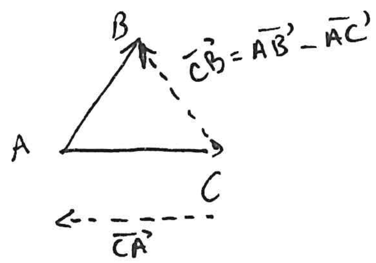
eller



Om $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ så gäller att $-\vec{u} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

Alltså

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \\
&= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{CB}
\end{aligned}$$



Koordinatsystem

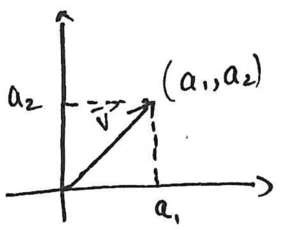
Vektorer kan representeras med koordinater i ett koordinatsystem. Vi arbetar med 2 eller 3 dimensionella koordinatsystem: 2-dimensionnellt : vektorer i planet

3-dimensionellt : vektorer i rummet.

Låt $\vec{v}$ vara en vektor. Placera $\vec{v}$ med startpunkt i origo. Koordinaterna för $\vec{v}$ är definierade som koordinatern av slutpunkten av $\vec{v}$.

Plan

- En vektor i planet har två koordinater (a_1, a_2) (eller $\langle a_1, a_2 \rangle$).



* norm: $\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

(normen betecknas $|\vec{v}|$ i boken)

* addition: $\vec{v} = (a_1, a_2)$

$\vec{u} = (b_1, b_2)$

$$\vec{u} + \vec{v} = (b_1, b_2) + (a_1, a_2)$$
$$= (b_1 + a_1, b_2 + a_2)$$

* Subtraktion: $\vec{u} - \vec{v} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2)$

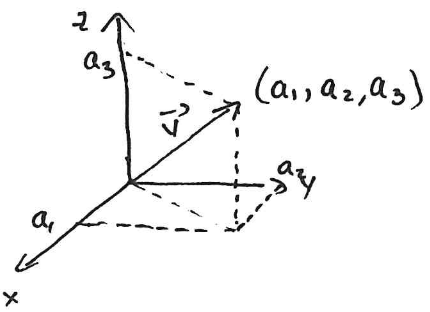
$= (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

* Multiplikation med: $c\vec{v} = c(a_1, a_2)$

en skalär c $= (ca_1, ca_2)$

Rum

- En vekter i rummet har tre koordinater (a_1, a_2, a_3) (eller $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$)



* norm: $\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

* addition: $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{u} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{u} + \vec{v} = (b_1, b_2, b_3) + (a_1, a_2, a_3)$$
$$= (b_1 + a_1, b_2 + a_2 + b_3 + a_3)$$

* Subtraktion:

$$\vec{u} - \vec{v} = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3)$$
$$= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

* Multiplikation med en skalär c:

$$c\vec{v} = c(a_1, a_2, a_3) = (ca_1, ca_2, ca_3)$$

Ex: Låt $\vec{u} = (1,0,-1)$ och $\vec{v} = (2,-1,1)$. Beräkna:

$\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $-2\vec{u}$, $\vec{u}+5\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$.

* $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$.
* $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{6}$
* $-2\vec{u} = -2(1,0,-1) = (-2,0,2)$
* $\vec{u}+5\vec{v} = (1,0,-1) + 5(2,-1,1)$

$$= (1,0,-1) + (10,-5,5)$$
$$= (11,-5,4)$$

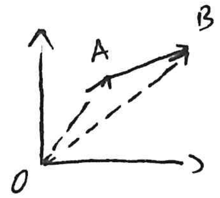
* $\vec{u}-\vec{v} = (1,0,-1) - (2,-1,1)$

$$= (1-2, 0-(-1), -1-1)$$
$$= (-1, 1, -2)$$

Ett annat sätt för att beräkna koordinaterna för en vektor:

Låt $\vec{v} = \vec{AB}$ där $A(a_1, a_2)$ och $B(b_1, b_2)$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$
$$= (b_1, b_2) - (a_1, a_2)$$
$$= (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$



Samma princip gäller i rummet.

Ex: Beräkna koordinater för vektorn $\vec{AB}$ i rummet där

$A = (1,-1,2)$ och $B = (-2,0,3)$.

$$\vec{AB} = (-2-1, 0-(-1), 3-2)$$
$$= (-3, 1, 1)$$

Räkneregler

Låt $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vara vektorer och c, d skalär.

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (Kommutativlagen).

2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (associativlagen)

3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$

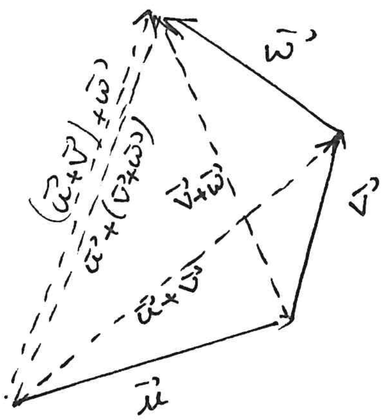
5. $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$

6. $(c+d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$

7. $(cd)\vec{u} = c(d\vec{u})$

8. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Bevis 2:



Standard bas: (i planet)

Låt $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$. Båda vektorer $\vec{i}$ och $\vec{j}$ är enhet.vektorer eftersom $\|\vec{j}\| = \|\vec{i}\| = \sqrt{1} = 1$.

Varje vektor $\vec{v} = (a_1, a_2)$ kan skrivas i termer av $\vec{i}, \vec{j}$.

$$\vec{v} = (a_1, a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1)$$
$$= a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

(vi säger att $\vec{v}$ är en linjär ekvation av $\vec{i}$ och $\vec{j}$)

$\{\vec{i}, \vec{j}\}$ kallas standard bas till planet.

Standard bas (i rummet)

Låt $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ är också enhetsvektorer och varje vektor $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$ kan skrivas som en linjär kombination av $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Dvs:

$$\vec{v} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1)$$
$$= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$

Ex: $\vec{u} = (-2,1,3) \Rightarrow \vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{v} = (1,0,1) \Rightarrow \vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$

$$\vec{u} + \vec{v} = -2\vec{i} + j + 3\vec{k} + \vec{i} + \vec{k}$$
$$= -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (-1,1,4).$$

Ex: Ange en enhetsvektor som har samma riktning som $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

Om vi multiplicera $\vec{v}$ med $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$ får vi en vektor som har samma riktning som $\vec{v}$, med storlek lika med $\left|\frac{1}{\|\vec{v}\|}\right| \cdot \|\vec{v}\|$

Men $\frac{1}{\|\vec{v}\|} > 0$ så $\left|\frac{1}{\|\vec{v}\|}\right| \cdot \|\vec{v}\| = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \|\vec{v}\| = 1$

Alltså, en enhetsvektor som har samma riktning som en vektor $\vec{v}$ är $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

$$\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k} \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{4}{5\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}.$$