Föreläsning 2
23-01-19

12.3 Skalärprodukt

Def: Låt $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ och $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ vara 2 vektorer i rummet. Skalärprodukten av $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är talet $\vec{u} \cdot \vec{v}$ där

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Notera att med addition och subtraktion mellan två vektorer, får man en vektor, men skalärprodukten av två vektorer är en skalär.

Om $\vec{u} = (a_1, a_2)$ och $\vec{v} = (b_1, b_2)$ är vektorer i planet,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 .$$

Ex:
$$(3, -4) \cdot (2, 1) = 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 = 2$$
$$(3, -1, 2) \cdot (0, 1, 0) = 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = -1$$
$$\left.\begin{array}{l}(1, 2, 3) \cdot (1, 1, 1) = 1 + 2 + 3 = 6 \\ (1, 1, 1) \cdot (1, 2, 3) = 1 + 2 + 3 = 6\end{array}\right\} =$$
$$(2, -1) \cdot (2, -1) = 2^2 + (-1)^2 = 5 = \|(2, -1)\|^2$$
$$\vec{i} \cdot \vec{i} = (1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) = 1$$
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0$$

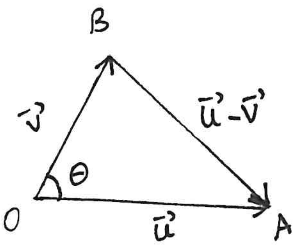
Räkneregler: Låt $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vara tre vektorer och k en skalär

1. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
4. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$
5. $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$

Bevis: 3. Antag att $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ är vektorer i rummet och $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ och $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3)$$
$$= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)$$
$$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3$$
$$= \underbrace{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}_{} + \underbrace{a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3}_{}$$
$$= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Geometrisk beskrivning av skalärprodukten.



Enligt cosinussatsen

$$\boxed{AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\, OA \cdot OB \cos\theta} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$AB = \|\vec{u} - \vec{v}\|$, $OA = \|\vec{u}\|$ och $OB = \|\vec{v}\|$

så,

$$\boxed{\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\theta} \quad (1)$$

På andra sidan,

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$
$$= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \qquad (\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u})$$
$$= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$
$$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad (2)$$

Alltså, (1) och (2) $\Rightarrow$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta} \quad \text{där } 0 \leq \theta \leq \pi$$

Ex: Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två vektorer med längd 2 och 3 respektiv och vinkeln mellan dem är $\frac{2\pi}{3}$ så gäller att

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\frac{2\pi}{3} = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = -3$$

Ex: Beräkna vinkeln mellan vektorerna $\vec{u} = (2,2,-1)$ och $\vec{v} = (0,1,-1)$

$\vec{u}.\vec{v} = 2(0) + 2(1) - 1(-1) = 0 + 2 + 1 = 3$

$||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

$||\vec{v}|| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \cos\theta \implies \boxed{\cos\theta = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{u}|| \, ||\vec{v}||}}$ ⚠ $\implies \cos\theta = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \implies \theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Konsekvenser :

⚠ 1. $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är vinkelräta mot varandra om och endast om $\vec{u}.\vec{v} = 0$

2. $\vec{u}.\vec{v} > 0 \iff ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \cos\theta > 0 \iff \cos\theta > 0 \iff 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (spetsig vinkel)

3. $\vec{u}.\vec{v} < 0 \iff ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \cos\theta < 0 \iff \cos\theta < 0 \iff \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ (trubbig vinkel)

4. Om $\theta = 0 \iff \vec{u}$ och $\vec{v}$ är parallella med samma riktning
$\iff \vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}||$

5. Om $\theta = \pi \iff \vec{u}$ och $\vec{v}$ är parallella med motsatsa riktningar
$\iff \vec{u}.\vec{v} = -||\vec{u}|| \, ||\vec{v}||$

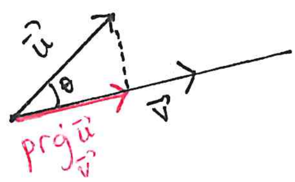
Ex. Visa att $\vec{u} = (2,2,-1)$ och $\vec{v} = (-3,0,-6)$ är vinkelräta mot varandra:

$\vec{u}.\vec{v} = 2\cdot(-3) + 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-6) = -6 + 0 + 6 = 0$. Alltså $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Projektioner

Om vi projicerar ortogonalt en vektor $\vec{u}$ på en vektor $\vec{v}$ får vi en vektor i riktning av $\vec{v}$ som kallas ortogonala projektionen av $\vec{u}$ på $\vec{v}$, och betecknas $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$.

Vi beräknar först normen av $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$:



$\cos\theta = \dfrac{||\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}||}{||\vec{u}||} \implies ||\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}|| = \cos\theta \, ||\vec{u}||$

På andra sidan, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

Alltså $\|\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\| = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\cancel{\|\vec{u}\|}\,\|\vec{v}\|}\cancel{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

För att få projektion vektorn $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ kan man multiplicera $\|\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\|$ med en enhetsvektorn som har samma riktning som $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ (eller samma riktning som $\vec{v}$). En enhetsvektor som har samma riktning som $\vec{v}$ är $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ (section 12.2)

Alltså $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\cdot\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\,\vec{v}$.

$$\boxed{\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\,\vec{v}} \qquad \boxed{\|\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{v}\|}}$$

Ex: Låt $\vec{u} = (6,3)$ och $\vec{v} = (2,6)$. Beräkna

$\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$, $\|\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}\|$, $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ och $\|\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\|$

$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u} = \frac{12+18}{36+9}(6,3) = \frac{30}{45}(6,3) = \frac{2}{3}(6,3) = (4,2)$$

$$\|\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}\| = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|} = \frac{30}{\sqrt{45}} = \frac{30}{3\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$ <u>eller</u> $\|\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}\| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$$\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\,\vec{v} = \frac{30}{4+36}(2,6) = \frac{30}{40}(2,6) = \frac{3}{4}(2,6) = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

$$\|\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}\| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{90}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{10}.$$