Föreläsning 3

28-01-19

12.4 Vektorprodukt

Vektorprodukten av två vektorer i rummet ($\vec{u}$ och $\vec{v}$) är en vektor som är vinkelrät med båda $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

Def: Låt $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ och $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$. Vektorprodukten av $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är vektorn $\vec{u} \times \vec{v}$ definierad som här:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Ex: Beräkna vektorprodukten $\vec{u} \times \vec{v}$ där $\vec{u} = (3, 0, 4)$ och $\vec{v} = (-2, 1, 5)$

Är $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$??

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0 \cdot 5 - 4 \cdot 1,\ 4 \cdot (-2) - 3 \cdot 5,\ 3 \cdot 1 - 0 \cdot (-2))$$
$$= (-4, -23, 3)$$

En annan metod:

$$\begin{array}{cc} \vec{u} & \vec{v} \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0 - 4, -8 - 15, 3 - 0)$$
$$= (-4, -23, 3)$$

$\vec{v} \times \vec{u}$:

$$\begin{array}{cc} \vec{v} & \vec{u} \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = (1 \cdot 4 - 0 \cdot 5,\ 5 \cdot 3 - (-2) \cdot 4,\ -2 \cdot 0 - 3 \cdot 1)$$
$$= (4, 23, -3) = -\vec{u} \times \vec{v}$$

så $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$ men $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.

Sats: Vektorn $\vec{u} \times \vec{v}$ är vinkelrät med båda $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

Bevis: Låt $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ och $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$.

$\vec{u} \times \vec{v}$ är vinkelrät med $\vec{u}$ om och endast om $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot (a_1, a_2, a_3)$$
$$= a_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$
$$= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 - a_2 a_3 b_1$$
$$= 0$$

Man kan visa att $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$ på samma sätt.

<u>Sats:</u> Låt $\vec{u}, \vec{v}$ vara två vektorer i rummet och θ är vinkeln mellan dem $(0 \leq \theta \leq \pi)$, så

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin\theta.$$

<u>Ex:</u> Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två vektorer där $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ och vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är $\frac{\pi}{4}$. Beräkna $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin\frac{\pi}{4}$$
$$= 3\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 3.$$

<u>Anmärkning</u>: * Om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är parallella så är vinkeln θ mellan dem 0 eller π. I båda fall $\sin\theta = 0$. Alltså $\vec{u} \times \vec{v} = 0$.

* Om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är vinkelräta motvarandra så $\theta = \frac{\pi}{2}$ och $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Alltså $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

* Läs "Right-hand rule" s. 817

<u>Ex:</u> Låt $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ vara standard basen i $\mathbb{R}^3$.

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ $\qquad$ $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ $\qquad$ $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$ $\qquad$ $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$ $\qquad$ $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$ $\qquad$ $\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

Låt $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ och $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{k}$

<u>Räkneregler:</u>

Låt $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{w}$ vara 3 vektorer i rummet och k en skalär:

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

2. $(k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (k\vec{v})$

3. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

4. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$

5. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

6. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

<u>Bevis 5</u>: Låt $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$

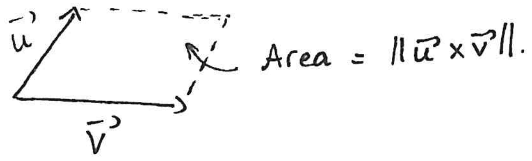
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_2c_3 - b_3c_2,\ b_3c_1 - b_1c_3,\ b_1c_2 - b_2c_1)$$
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$
$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$
$$= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3$$
$$= (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

<u>Ex</u>: Låt $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{k}$. Beräkna $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} - 2\vec{k})$$
$$= 2\underbrace{\vec{i} \times \vec{i}}_{0} - 3\vec{j} \times \vec{i} + k \times \vec{i} - 4\vec{i} \times \vec{k} + 6\vec{j} \times k - 2\overbrace{\vec{k} \times \vec{k}}^{0}$$
$$= 0 + 3\underbrace{\vec{i} \times \vec{j}}_{k} + \underbrace{k \times \vec{i}}_{j} + 4\underbrace{k \times \vec{i}}_{j} + 6\underbrace{\vec{j} \times \vec{k}}_{i} - 0$$
$$= 3\vec{k} + 5\vec{j} + 6\vec{i}$$
$$= 6\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$$

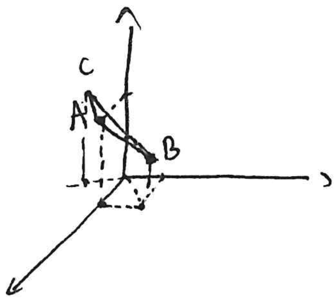
Area och Volym

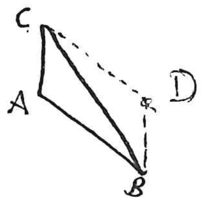
Låt $\vec{u}, \vec{v}$ vara två vektorer. Normen av $\vec{u} \times \vec{v}$ är lika med arean av parallellogramen som spänns upp av $\vec{u}$ och $\vec{v}$.



Area $= \|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

Ex: Låt $A = (1,0,2)$, $B = (1,1,1)$ och $C = (0,-1,2)$ vara 3 punkter i rummet. Beräkna arean av triangeln ABC.





Låt D vara punkten så att ABDC är en parallellogram

Arean av ABDC $= \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$

$\vec{AB} = (1-1, 1-0, 1-2) = (0,1,-1)$

$\vec{AC} = (0-1, -1-0, 2-2) = (-1,-1,0)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

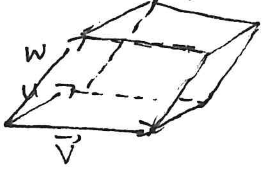
$\Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = (0-1, 1-0, 0+1) = (-1,1,1)$

$\Rightarrow \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.

Arean av ABC är halv arean av ABDC

Alltså arean av ABC $= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Man kan använda skalär- och vektorprodukten för att beräkna volymen av en parallelepiped. Låt $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{w}$ vara 3 vektorer i rummet som spänns upp en parallellepiped (se figuren nedan)



Volymen av parallellepipeden är

$$V = |\bar{u}' \cdot (\bar{v}' \times \bar{w}')|$$ ← absolutbelopp

Ex: Använd formeln ovanför för att beräkna volymen av parallellepipede spänns upp av

a) $\bar{u}' = (1, 0, 1)$ $\bar{v}' = (0, 1, 0)$ och $\bar{w}' = (-1, 0, 1)$

b) $\bar{u}' = (1, 4, -7)$ $\bar{v}' = (2, -1, 4)$ och $\bar{w}' = (0, -9, 18)$

a) $\bar{v}' \times \bar{w}' = (1, 0, 1)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{u}' \cdot (\bar{v}' \times \bar{w}') = (1,0,1) \cdot (1,0,1)$

$= 2$

$\Rightarrow |\bar{u}' \cdot (\bar{v}' \times \bar{w}')| = 2 \Rightarrow V = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ +18 \end{pmatrix}$$

b) $\bar{v}' \times \bar{w}' = (-18 + 36, 0 - 36, -18 - 0)$

$= (18, -36, -18)$

$\bar{u}' \cdot (\bar{v}' \times \bar{w}') = (1, 4, -7) \cdot (18, -36, -18)$

$= 18 - 4 \cdot 36 + 7 \cdot 18 = 18 - 144 + 126 = 0$

↳ $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$ tillhör samma planet.

Konsekvens

$\bar{u}'$, $\bar{v}'$ och $\bar{w}'$ tillhör samma planet om och endast om

$\bar{u}' \cdot (\bar{v}' \times \bar{w}') = 0$ (eller $\bar{v}' \cdot (\bar{u}' \times \bar{w}') = 0$ eller $\bar{w}' \cdot (\bar{u}' \times \bar{v}') = 0$)