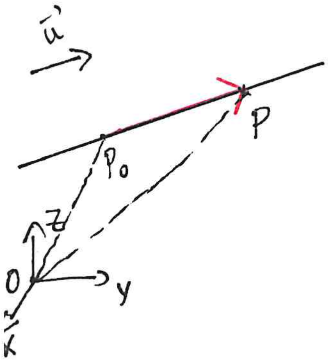
öreläsning 4
30-01-18

12.5 Linjen och planets ekvation.

En linje bestäms unikt av en punkt och en riktningsvektor.



I figuren till vänster är vektorn $\overrightarrow{P_0P}$ parallell till vektorn $\vec{u}$, dvs $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{u}$ där t är en skalär. t kallas en parameter

I en koordinatsystem $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ kan man skriva

$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$

Alltså, $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = t\vec{u}$

$\Leftrightarrow$ (1) $\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{u}}$ ← ekvationen för linjen på vektorform.

Om (x,y,z), (x_0,y_0,z_0) och (a,b,c) är koordinater till P, P_0 och $\vec{u}$ respektiv, kan ekvationen (1) skrivas som:

$$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(a,b,c)$$ ← vektorform

↑ Koordinater till $\overrightarrow{OP}$ som är samma som koordinater till P

↑ Koordinater till $\overrightarrow{OP_0}$ som är samma som koordinater till P_0

$$\Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (x_0+ta,\ y_0+tb,\ z_0+tc)$$

$$\Leftrightarrow \quad ② \boxed{\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$$

ekvationen på parameterform

Ekvationerna i ② kan skrivas om som:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + ta \Leftrightarrow t = \dfrac{x-x_0}{a} \\ y = y_0 + tb \Leftrightarrow t = \dfrac{y-y_0}{b} \\ z = z_0 + tb \Leftrightarrow t = \dfrac{z-z_0}{c} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}}$$

ekvationen på parameterfri form (symmetric equations)

där $a \neq 0$, $b \neq 0$ och $c \neq 0$

Ex: Skriv upp en ekvation för linjen (ℓ) genom punkten P_0 med riktningsvektorn $\vec{u}$ på vektorform, parameterform och parameterfriform:

(a) $P_0 = (-6,2,1)$, $\vec{u} = (-4,1,2)$

(b) $P_0 = (2,1,-1)$, $\vec{u} = (1,-1,0)$

Lösning (a) **Vektorform**: $(x,y,z) = (-6,2,1) + t(-4,1,2)$

Parameterform:
$$\begin{cases} x = -6-4t \\ y = 2+t \\ z = 1+2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Parameterfri form:
$$\frac{x+6}{-4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

(b) **Vektorform**: $(x,y,z) = (2,1,-1) + t(1,-1,0)$

Parameterform:
$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = -1 \end{cases}$$

Parameterfriform:
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \cancel{\frac{z+1}{0}}$$

Man kan inte dela med 0

I detta fall skrivs parameterfriform som:
$$\begin{cases} x-2 = 1-y \\ z = -1 \end{cases}$$

Anmärkning: Om en av koordinater av $\vec{u}$ är noll, t.ex. a, blir parameterfriform:
$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c} \end{cases}$$

Ex: (a) Skriv upp parameterfriform för linjen (ℓ) genom punkterna $A(2,4,-3)$ och $B(3,-1,1)$.

(b) Bestäm koordinaterna till skärningpunkter mellan linjen och (xy)-plan, (yz)-plan och (xz)-plan.

(a) $\overrightarrow{AB}$ är en riktningsvektor till (ℓ):

$\overrightarrow{AB} = (3-2, -1-4, 1-(-3)) = (1,-5,4)$.

$A = (2,4,-3)$ är en punkt på linjen.

Parameterfriform: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{-5} = \dfrac{z+3}{4}$.

(b) * skärningspunkt P_{xy} mellan (ℓ) och (xy)-plane.

(xy)-plane : $z=0$

$$\Rightarrow \quad x-2 = \frac{y-4}{-5} = \frac{0+3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x-2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 2+\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

och $\dfrac{y-4}{-5} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow y-4 = -\dfrac{15}{4} \Rightarrow y = 4-\dfrac{15}{4} = \dfrac{1}{4}$.

$$\Rightarrow P_{xy} = \left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$$

* skärningspunkt P_{yz} mellan (ℓ) och (yz)-plan:

$$x=0 \Rightarrow -2 = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+3}{4}$$

$$-2 = \frac{y-4}{-5} \Rightarrow y-4 = 10 \Rightarrow y = 14$$

$$-2 = \frac{z+3}{4} \Rightarrow z+3 = -8 \Rightarrow z = -11$$

$$P_{yz} = (0, 14, -11)$$

* skärningspunk P_{xz} mellan (ℓ) och (xz)-plan:

$$y=0 \Rightarrow x-2 = \frac{-4}{-5} = \frac{z+3}{4}$$

$$x-2 = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = 2+\frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

$$\frac{z+3}{4} = \frac{4}{5} \Rightarrow z+3 = \frac{16}{5} \Rightarrow z = -3+\frac{16}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P_{xz} = \left(\frac{14}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$$

Skärning mellan två linjer

Två linjer i rummet kan vara parallella, eller kan skära i en punkt eller kan vara skeva linjer (dvs de korsar inte varandra, och är inte parallella)

Ex: Visa att linjerna $(L_1): \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+3t \\ z = 4-t \end{cases}$ $(L_2): \begin{cases} x = 2s \\ y = 3+s \\ z = -3+4s \end{cases}$ är skeva linjer.

En riktningsvektor till (L_1): $\vec{u_1} = (1, 3, -1)$

En riktningsvektor till (L_2): $\vec{u_2} = (2, 1, 4)$

Två vektorer $\vec{v}\,(v_1, v_2, v_3)$ och $\vec{w}\,(w_1, w_2, w_3)$ är parallella om $\vec{v} = k\vec{w}$, $k \in \mathbb{R}$. Om w_1, w_2, w_3 är icke noll, så är $\vec{v}$ och $\vec{w}$ parallella om $\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3}$

Eftersom $\frac{1}{2} \neq \frac{3}{1}$ så är (L_1) och (L_2) inte parallella.

Om linjerna (L_1) och (L_2) korsar varandra, finns det t och s så att

$$(*) \begin{cases} x = 1+t = 2s & (1) \\ y = -2+3t = 3+s & (2) \\ z = 4-t = -3+4s & (3) \end{cases}$$

$(1) \rightarrow t = 2s-1$

$(2) \rightarrow -2+3t = 3+s \Rightarrow -2+3(2s-1) = 3+s$

$\Rightarrow -2+6s-3 = 3+s$

$\Rightarrow 5s = 8 \Rightarrow s = \frac{8}{5} \overset{(1)}{\Rightarrow} t = \frac{16}{5} - 1 = \frac{11}{5}$

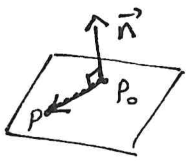
Vi kollar om ekvation (3) stämmer om $s = \frac{8}{5}$ och $t = \frac{11}{5}$

$4 - \frac{11}{5} = \frac{9}{5}$, $-3+4s = -3+\frac{32}{5} = \frac{17}{5} \neq \frac{9}{5}$

Alltså det finns ingen s och t så att systemet $(*)$ har en lösning

Så är (L_1) och (L_2) skeva linjer.

Planer: En vektor som är vinkelrät mot två icke-parallella vektorer i ett plan, är vinkelrät mot alla vektorer i samma planet.
En vektor som är vinkelrät mot alla vektorer i planet kallas en normalvektor. Ett plan bestäms entydigt av en punkt och en normal vektor.



Låt $\vec{n} = (a, b, c)$ vara en normalvektor till ett plan (P) och $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ en punkt på planet.

Om $P = (x, y, z)$ är en slumpmässig punkt på planet, är vektorerna $\overrightarrow{P_0P}$ och $\vec{n}$ vinkelräta mot varandra.

Alltså $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$, där $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$
$\vec{n} = (a, b, c)$

Dvs, $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$\Leftrightarrow \quad ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{ax + by + cz + d = 0}$ där $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

plans ekvation.

Ex: a) Bestäm en ekvation till planet genom punkterna

$A = (-1, 4, 0)$ $B = (3, 3, -2)$ och $C = (1, 0, 4)$

b) Avgör om planet i a) innehåller punkterna

$D = (0, 2, 2)$ och $E = (1, 1, 2)$

c) Avgör om linjen (ℓ) $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4t \\ z = 5 + t \end{cases}$ är parallell till planet i a). Om så inte är fallet, bestäm koordinaterna till skärningspunkt mellan linjen och planet.

Lösning: a) Vi börjar med att beräkna en normalvektor till planet.

$\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är två riktningsvektorer i planet.

$$\overrightarrow{AB} = (3-(-1),\ 3-4,\ -2-0) = (4,-1,-2)$$
$$\overrightarrow{AC} = (1-(-1),\ 0-4,\ 4-0) = (2,-4,4)$$

$\}\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

En vektor som är vinkelrät mot $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \big((-1)\cdot 4 - (-2)\cdot(-4),\ -2\cdot 2 - 4\cdot 4,\ 4\cdot(-4) - (-1)\cdot 2\big)$$
$$= (-12, -20, -14) = \vec{n}$$

Planetsekvation: $-12(x - x_A) - 20(y - y_A) - 14(z - z_A) = 0$

där (x_A, y_A, z_A) är koordinaterna till punkt A (eftersom A tillhör planet (ni kan använda B eller C istället))

$$\iff -12(x+1) - 20(y-4) - 14(z-0) = 0$$
$$\overset{\div(-2)}{\iff} 6(x+1) + 10(y-4) + 7z = 0$$
$$\iff \boxed{6x + 10y + 7z - 34 = 0}$$

b) $D = (0,2,2)$: $6\cdot 0 + 10\cdot 2 + 7\cdot 2 - 34 = 0 + 20 + 34 - 34 = 0$

$\Rightarrow$ D tillhör planet.

$E = (1,1,2)$: $6\cdot 1 + 10\cdot 1 + 7\cdot 2 - 34 = 6 + 10 + 14 - 34 = -4 \neq 0$

$\Rightarrow$ D tillhor inte planet

c) Linjen (ℓ) är parallellt till planet (ℓ):s riktningsvektor är vinkelrät mot planets normalvektor.

en riktningsvektor till ℓ är $\vec{u} = (3, -4, 1)$

$\vec{u}\cdot\vec{n} = 3(-12) - 4(-20) - 14 = -36 + 80 - 14 = 30 \neq 0 \Rightarrow$ linjen är inte parallell till planet.

Skärningspunkt:

Sätta in $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -4t \\ z = 5+t \end{cases}$ i planets ekvation $6x+10y+7z-34=0$

$\Rightarrow \quad 6(2+3t)+10(-4t)+7(5+t)-34=0$

$\Leftrightarrow \quad 12+18t-40t+35+7t-34=0$

$\Leftrightarrow \quad -15t+13=0$

$\Leftrightarrow \quad t=\frac{13}{15}.$

Skärningspunkten är : $\left.\begin{array}{l} x = 2+3\cdot\frac{13}{15} = 2+\frac{13}{5} = \frac{23}{5} \\ y = -4\cdot\frac{13}{15} = -\frac{52}{15} \\ z = 5+\frac{13}{15} = \frac{75+13}{15} = \frac{88}{15} \end{array}\right\} \left(\frac{23}{5}, -\frac{52}{15}, \frac{88}{15}\right)$

Jämföra två planer

Två plan är antingen parallella eller så skär de varandra i en linje.

Planen är parallella om deras normalvektorer är parallella. Om de inte är parallella, är vinkeln mellan dem lika med den spetsig vinkeln mellan deras normalvektorer

Ex: a) Visa att planen $x+2y-3z=4$ och $2x+4y-6z=3$ är parallella.

b) Bestäm vinkeln mellan planen $x+y+z=1$ och $x-2y+3z=1$ och ange en ekvation på parameterform till skärningslinjen mellan dem.

Lösning:

a) En normal vektor till planet $x+2y-3z=4$ är $\vec{n}_1=(1,2,-3)$

En normal vektor till planet $2x+4y-6z=3$ är $\vec{n}_2=(2,4,-6)$

Eftersom $\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$, är vektorerna $\vec{n}_1$ och $\vec{n}_2$ parallella. Alltså planen är parallella.

b) En normal vektor till $x+y+z=1$ är $\vec{n}_1 = (1,1,1)$

En normal vektor till $x-2y+3z=1$ är $\vec{n}_2 = (1,-2,3)$

Vinkeln mellan $\vec{n}_1$ och $\vec{n}_2$:

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} = \frac{1-2+3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{42}}. \quad \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72^\circ.$$

<u>Skärningslinje</u>: En riktnings vektor $\vec{v}$ till skärningslinjen är vinkelrät mot $\vec{n}_1$ och $\vec{n}_2$. Alltså, vi kan ta $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (5,-2,-3).$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

För att bestämma linjens ekvation behöver vi också ha en punkt på linjen. Vi kan ta t.ex punkten där linjen skär xy-plan, dvs, $z=0$.

Om $z=0 \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 & (-1) \\ x-2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ -3y=0 \Rightarrow y=0 \end{cases} \Rightarrow x=1$

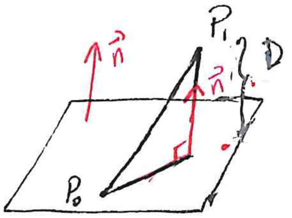
Alltså punkten $(1,0,0)$ ligger på skärningslinjen.

(Om $z=0$ fungar inte, försök med $x=0$ eller $y=0$)

Linjensekvation blir:
$$\begin{cases} x = 1+5t \\ y = -2t \\ z = -3t \end{cases}$$

Avståndsproblem

Bestäm avståndet mellan en punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ och planet $ax+by+cz+d=$



För att få D kan man projicera vektorn $\overrightarrow{P_0P_1}$ på vektorn $\vec{n}$ och ta normen av resultatet.

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} .$$

Ex: Beräkna avståndet mellan punkten $A(2,-3,1)$ och planet $-2x - y + 2z - 7 = 0$.

Lösning: $$D = \frac{|-2\cdot 2 - (-3) + 2\cdot 1 - 7|}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{9}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} .$$