Matematik
Chalmers tekniska högskola

MVE530 Dugga 2, version A, 2017–10–04

Namn: Lösningar

Personnummer: ....

Uppgift	Poäng
1	
2	
3	
Summa:	

1. Låt $f(x) = \frac{1}{x}$. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h}.$$

Lösning:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2-h}}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2-h}{(2+h)(2-h)} - \frac{2+h}{(2+h)(2-h)}}{2h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2-h-2-h}{4-h^2}}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{2h(4-h^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{4-h^2} = -\frac{1}{4}$$

<u>Svar</u>: Gränsvärdet $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h} = -\frac{1}{4}$

2. Lös ekvationen $\ln(x^4 - 8x^2) - 2\ln(x) = 0$.

Lösning:

$$\ln(x^4 - 8x^2) - 2\ln(x) = 0$$

$$\ln(x^4 - 8x^2) - \ln(x^2) = 0$$

$$\ln\left(\frac{x^4 - 8x^2}{x^2}\right) = 0$$

$$\ln(x^2 - 8) = 0$$

$$x^2 - 8 = 1$$

$$x^2 = 9$$

$x = 3$ eller $x = -3$

För att ekvationen ska vara giltlig måste $x^4 - 8x^2 > 0$ och $x > 0$.
Därför är $x = -3$ ej en giltlig lösning.

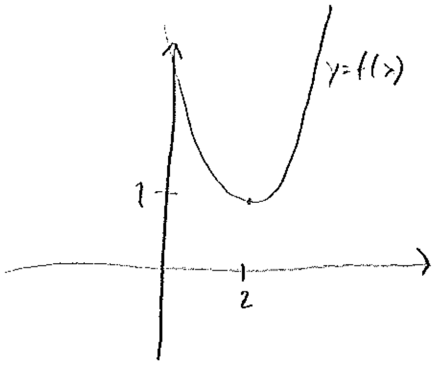
$3^4 - 8 \cdot 3^2 = 81 - 8 \cdot 9 = 9 > 0$

$x = 3$ är giltligt!

Svar: $x = 3$ löser ekvationen.

3. Funktionen $f(x) = x^2 - 4x + 5$ är inte injektiv på $\mathbb{R}$. Bestäm en maximal definitionsmängd så att $f(x)$ är injektiv. Vad är inversen till $f(x)$ på den definitionsmängden?

Lösning:



Kvadratkomplettering ger

$f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 - 4 + 5 = (x-2)^2 + 1$

Utifrån grafen är $f(x)$ injektiv

på $[2, \infty)$ (alternativt $(-\infty, 2]$).

För att bestämma inversen löser vi ut x från

$y = f(x) = (x-2)^2 + 1$

$y - 1 = (x-2)^2$

$\sqrt{y-1} = x - 2$

$2 + \sqrt{y-1} = x$

$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-1}$

($f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ vid valet $(-\infty, 2]$ som definitionsmängd.)

Svar: $f(x)$ är injektiv på $[2, \infty)$ och inversen ges då av $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-1}$.