Matematik
Chalmers tekniska högskola

MVE530 Dugga 2, version B, 2017–10–04

Namn: Lösningar

Personnummer: ....

Uppgift	Poäng
1	
2	
3	
Summa:	

1. Lös ekvationen $\ln(x^4 - 3x^2) - 2\ln(x) = 0$.

Lösning:

$$\ln(x^4 - 3x^2) - 2\ln(x) = 0$$

$$\ln(x^4 - 3x^2) - \ln(x^2) = 0$$

$$\ln\left(\frac{x^4 - 3x^2}{x^2}\right) = 0$$

$$\ln(x^2 - 3) = 0$$

$$x^2 - 3 = 1$$

$$x^2 = 4$$

$x = 2$ eller $x = -2$

För att ekvationen ska vara giltlig måste $x^4 - 3x^2 > 0$ och $x > 0$.

Därför är $x = -2$ ej en giltlig lösning.

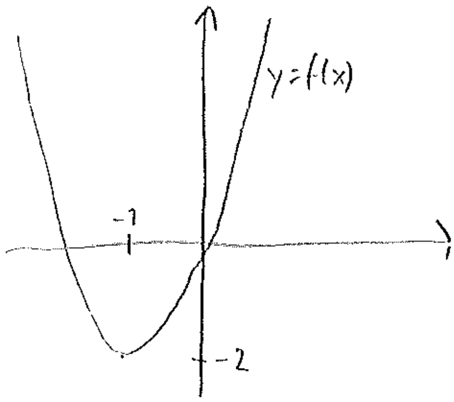
$$2^4 - 3 \cdot 2^2 = 16 - 3 \cdot 4 = 4 > 0$$

$x = 2$ är giltligt!

Svar: $x = 2$ löser ekvationen.

2. Funktionen $f(x) = x^2+2x-1$ är inte injektiv på $\mathbb{R}$. Bestäm en maximal definitionsmängd så att $f(x)$ är injektiv. Vad är inversen till $f(x)$ på den definitionsmängden?

Lösning:



Kvadratkomplettering ger

$f(x) = x^2+2x-1 = (x+1)^2-1-1 = (x+1)^2-2$

Utifrån grafen är $f(x)$ injektiv på $[-1,\infty)$ (alternativt $(-\infty,-1]$).

För att bestämma inversen löser vi ut x från

$y = f(x) = (x+1)^2-2$

$y+2 = (x+1)^2$

$\sqrt{y+2} = x+1$

$-1+\sqrt{y+2} = x$

$f^{-1}(x) = -1+\sqrt{x+2}$

($f^{-1}(x) = -1-\sqrt{x+2}$ vid valet $(-\infty,-1]$ som definitionsmängd.)

Svar: $f(x)$ är injektiv på $[-1,\infty)$ och inversen ges då av $f^{-1}(x) = -1+\sqrt{x+2}$.

3. Låt $f(x) = \frac{1}{x}$. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{2h}.$$

Lösning:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3-h}}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3-h}{(3+h)(3-h)} - \frac{3+h}{(3+h)(3-h)}}{2h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3-h-3-h}{9-h^2}}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{2h(9-h^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{9-h^2} = -\frac{1}{9}$$

Svar: Gränsvärdet $\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3-h)}{2h} = -\frac{1}{9}$