MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2017-08-15 kl. 08.30–12.30

Lösningsförslag Telefonvakt: Olof Elias

ankn 5325

LMA515 Matematik del a för KI1 och LMA033 Matematik för BI1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2016 räknas med i första delen. För betyg 4 resp. 5 krävs 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (15p)

2. (a) Formulera faktorsatsen. (1p)

Svar: Om $p(x)$ är ett polynom så finns ett tal b så att $p(b) = 0$ omm $p(x)$ har en faktor $x - b$.

(b) Använd faktorsatsen för att faktorisera $p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 12x - 16$ så långt som möjligt. Tips: $p(-1) = 0$. (3p)

Lösning: $p(-1) = 0$ så faktorsatsen ger att $p(x)$ har en faktor $x+1$. Polynomdivision ger $\dfrac{2x^3 + 6x^2 - 12x - 16}{x+1} = 2x^2 + 4x - 16$. Kvadratkomplettering ger $2x^2 + 4x - 16 = 2(x^2 + 2x - 8) = 2((x+1)^2 - 9) = 2(x+1+3)(x+1-3) = 2(x+4)(x-2)$. Alltså får vi faktoriseringen $p(x) = 2(x-2)(x+1)(x+4)$.

3. Låt $f(x) = \cos\big(\ln(x^2+1)\big)$.

(a) Derivera funktionen $f(x)$. (3p)

Lösning: Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin\big(\ln(x^2+1)\big)\frac{d}{dx}\ln(x^2+1) = -\frac{\sin\big(\ln(x^2+1)\big)}{x^2+1}\frac{d}{dx}(x^2+1) \\ &= -\frac{2x}{x^2+1}\sin\big(\ln(x^2+1)\big) \end{aligned}$$

(b) Är funktionen $f(x)$ jämn, udda eller varken udda eller jämn? (1p)

Svar: Funktionen är jämn ty $f(-x) = \cos\big(\ln((-x)^2+1)\big) = \cos\big(\ln(x^2+1)\big) = f(x)$.

4. Beräkna följande gränsvärde. (4p)

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}}.$$

Lösning:

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}} = \lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}} = \lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}} = \lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}+2}}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{4}+2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Gränsvärdet kan flyttas in på grund av att $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} = x^{-1/2}$ är kontinuerlig i $x = 4$.

5. Bestäm derivatan av $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)-1}$ och förenkla så långt som möjligt. (4p)

Lösning:

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(\cos x)(\sin x - 1) - \cos x \frac{d}{dx}(\sin x - 1)}{(\sin x - 1)^2} = \frac{-\sin x(\sin x - 1) - \cos x \cos x}{(\sin x - 1)^2}$$
$$= \frac{-\sin^2 x + \sin x - \cos^2 x}{(\sin x - 1)^2} = \frac{\sin x - 1}{(\sin x - 1)^2} = \frac{1}{\sin x - 1}$$

I näst sista steget användes trigonometriska ettan ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

6. En vikt upphängd i en dämpad fjäder svänger så att positionen av vikten vid tiden t ges av $s(t) = e^{-2t}\cos(2t)$. Bestäm alla tidpunkter då viktens acceleration är noll. (4p)

Lösning: Hastigheten och accelerationen är

$$\begin{aligned} v(t) &= s'(t) = -2e^{-2t}\cos(2t) + e^{-2t}(-2\sin(2t)) = e^{-2t}(-2\cos(2t) - 2\sin(2t)), \\ a(t) &= v'(t) = -2e^{-2t}(-2\cos(2t) - 2\sin(2t)) + e^{-2t}(4\sin(2t) - 4\cos(2t)) \\ &= 8e^{-2t}\sin(2t). \end{aligned}$$

På grund av att $e^{-2t} > 0$ för alla $t \in \mathbb{R}$ så är $a(t) = 0$ omm $\sin(2t) = 0$, dvs då $2t = \pi n$ för något heltal n.

Svar: $a(t) = 0$ omm $t = \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7. Bestäm alla horisontella och vertikala asymptoter till grafen $y = \dfrac{1+\sqrt{x^2+2}}{x-3}$. (3p)

Lösning: Låt $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x^2+2}}{x-3}$. Uttrycket är inte definierat för $x = 3$ så vi undersöker $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ så vi har en vertikal asymptot i $x = 3$.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{1+|x|\sqrt{1+2x^{-2}}}{x(1-3x^{-1})} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x(x^{-1}-\sqrt{1+2x^{-2}})}{x(1-3x^{-1})} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^{-1}-\sqrt{1+2x^{-2}}}{1-3x^{-1}}$$
$$= \frac{0-\sqrt{1+2\cdot 0}}{1-3\cdot 0} = -1,$$
$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty}\frac{1+|x|\sqrt{1+2x^{-2}}}{x(1-3x^{-1})} = \lim_{x\to \infty}\frac{x(x^{-1}+\sqrt{1+2x^{-2}})}{x(1-3x^{-1})} = \lim_{x\to \infty}\frac{x^{-1}+\sqrt{1+2x^{-2}}}{1-3x^{-1}}$$
$$= \frac{0+\sqrt{1+2\cdot 0}}{1-3\cdot 0} = 1,$$

ger horisontella asymptoter $y = -1$ och $y = 1$ till väster respektive höger.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

8. (a) Formulera instängningssatsen (squeeze theorem). (1p)
Svar: Se boken.

(b) Använd instängninssatsen för att visa $\lim_{x\to 1}(\ln(x))^2\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$. (3p)

Lösning: På grund av att $-1 \le \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \le 1$ för alla $x \ne 1$ så har vi $-(\ln(x))^2 \le (\ln(x))^2\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \le (\ln(x))^2$ för alla $x \ne 1$. Både $-(\ln(x))^2$ och $(\ln(x))^2$ går mot 0 då x går mot 1, så instängningssatsen ger att $\lim_{x\to 1}(\ln(x))^2\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$.

9. Låt

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3} & \text{om } x < 1 \\ 1 + \frac{x}{2} & \text{om } x \ge 1 \end{cases}$$

(a) Är $f(x)$ kontinuerlig i punkten $x = 1$? Motivera ditt svar. (2p)

Lösning: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sqrt{1+3} = 2$, men $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ne \lim_{x\to 1^-} f(x)$ och $f(1) = \frac{3}{2} \ne \lim_{x\to 1^-} f(x)$ så $f(x)$ är diskontinuerlig i $x = 1$. **Svar:** Nej.

(b) Är $f(x)$ deriverbar (differentiable) i punkten $x = 1$? Motivera ditt svar. (2p)

Svar: Nej, ty funktionen är diskontinuerlig. Observera att vänsterderivatan och högerderivatan i $x = 1$ är lika, men på grund av diskontinuiteten är funktionen inte deriverbar.

10. Bestäm derivatan till funktionen $f(x) = x^{2x^3}$. (4p)

Lösning: Funktionen kan skrivas om $f(x) = (e^{\ln x})^{2x^3} = e^{\ln(x)2x^3}$ så $f'(x) = e^{\ln(x)2x^3}\frac{d}{dx}(\ln(x)2x^3) = f(x)(x^{-1}2x^3 + \ln(x)6x^2) = x^{2x^3}x^2(2 + 6\ln(x)) = x^{2+2x^3}(2 + 6\ln(x))$.

Hoppas det gick bra!
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	LMA515 Matematik del a för KI1 och LMA033 Matematik för BI1	2017-08-15	sid.nummer **1**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Lös olikheten $|3x-1| \geq 2$. (4p)
Lösning: Om $3x-1 \geq 0$: $3x-1 \geq 2 \Leftrightarrow 3x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 1$.
Om $3x-1 < 0$: $-(3x-1) \geq 2 \Leftrightarrow -3x+1 \geq 2 \Leftrightarrow -3x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{3}$.
Svar: $x \leq -\frac{1}{3}$ eller $x \geq 1$.

(b) Ge en ekvation för den linje i planet som passerar genom $(3,1)$ och är parallell med linjen $2x+3y-1=0$. (3p)
Lösning: $2x+3y-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x$ så linjernas lutning är $k=-\frac{2}{3}$. Den nya linjens ekvation blir $y=k(x-3)+1=-\frac{2}{3}x+3$.
Svar: $y=-\frac{2}{3}x+3$.

(c) Beräkna inversen f^{-1} av $f(x)=x^2+2x+2$, $x \geq -1$ och ange definitionsmängd (domain) och värdemängd (range) för f^{-1} . (4p)
Lösning: Kvadratkomplettering ger $f(x)=(x+1)^2-1+2=(x+1)^2+1$ så $D_{f^{-1}}=V_f=[1,\infty[$. Om $x \geq -1$ och $y>1$: $y=f(x)=(x+1)^2+1 \Leftrightarrow y-1=(x+1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y-1}=x+1 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x=\sqrt{y-1}-1$.
Svar: $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}-1$ med $D_{f^{-1}}=V_f=[1,\infty[$ och $V_{f^{-1}}=D_f=[-1,\infty[$.

(d) Förenkla och lös ekvationen $\ln(3x^2-x)-2\ln(x)=0$. (4p)
Lösning: Uttrycket definierat om $3x^2-x>0$ och$x>0$.

$$0=\ln(3x^2-x)-2\ln(x)=\ln(3x^2-x)-\ln(x^2)=\ln(\frac{3x^2-x}{x^2})=\ln(\frac{3x-1}{x})$$
$$\Leftrightarrow 1=\frac{3x-1}{x} \Leftrightarrow x=3x-1 \Leftrightarrow 1=2x \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

$3(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}>0$ så båda villkoren är uppfyllda.
Svar: $x=\frac{1}{2}$.