Anonym kod	MVE530 Inledande matematik KI1 2017-10-25	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm ekvationen för den linje som är vinkelrät mot $y = -4x + 3$ och går genom punkten $(7, 2)$. (3p)

$y = kx + m$ är vinkelrät mot $y = -4x + 3$ om $-4 \cdot k = -1$.

Alltså $k = \frac{1}{4}$. Sätt in punkten $(7, 2)$

$2 = \frac{1}{4} \cdot 7 + m$

$m = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$

Svar: $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}.$$

(3p)

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)^2}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{3-3}{3+3} = 0$$

Svar: 0

(c) Bestäm definitionsmängden och värdemängden till inversen av $f(x) = 7 - \sqrt{x+3}$. (3p)

$D_{f^{-1}} = V_f$ och $V_{f^{-1}} = D_f$

$f(x)$ är definierad om $x+3 \geq 0$, alltså $x \geq -3$.

$f(x)$ blir aldrig större än 7, ty $\sqrt{x+3} \geq 0$.

Svar: $D_{f^{-1}} = (-\infty, 7]$ och $V_{f^{-1}} = [-3, \infty)$

(d) Hitta alla värden på x i intervallet $[0, \pi]$ som uppfyller ekvationen

$$2\sin(2x)\sin(x) = 3\cos(x).$$

(3p)

Dubbla vinkeln för sin ger

$4\sin^2(x)\cos(x) = 3\cos(x)$

$4\sin^2(x)\cos(x) - 3\cos(x) = 0$

$\cos(x)\left(4\sin^2(x) - 3\right) = 0$

Antingen är $\cos(x) = 0$ eller $4\sin^2(x) - 3 = 0$.

I intervallet $[0, \pi]$ är $\cos(x) = 0$ om $x = \frac{\pi}{2}$.

$\sin^2(x) = \frac{3}{4}$

$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{\pi}{3}$ eller $\frac{2\pi}{3}$.

Svar: $x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ och $\frac{2\pi}{3}$ uppfyller ekvationen.

2. Faktorsatsen ger att $(x-1)$ är en faktor till $p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$. Polynomdivision:

$$
\begin{array}{rl}
x^2 - 2x - 1 & \\
\hline
x^3 - 3x^2 + x + 1 & \big| \; x - 1 \\
-\;(x^3 - x^2) & \\
\hline
-2x^2 + x + 1 & \\
-\;(-2x^2 + 2x) & \\
\hline
-x + 1 & \\
-x + 1 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$p(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 1)$.

När är $x^2 - 2x - 1 = 0$?

p-q-formeln ger

$x = 1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 1}$

$x = 1 \pm \sqrt{2}$.

$x_1 = 1 + \sqrt{2}$ och $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ är nollställen till $p(x)$, så faktorsatsen ger att $p(x) = (x-1)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$.

Svar: $p(x) = (x-1)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$.

3. a) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(3x)}{x^2} \overset{\text{trig. ettan}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(3x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{9\sin^2(3x)}{9x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{9\sin^2(3x)}{(3x)^2} = \lim_{x\to 0} 9 \underbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}_{\to 1} = 9$$

Svar: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(3x)}{x^2} = 9$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2+3x-5}{2x^2-9x+8} = \lim_{x\to\infty} \frac{7+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{2-\frac{9}{x}+\frac{8}{x^2}} = \frac{7}{2}.$$

Svar: $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2+3x-5}{2x^2-9x+8} = \frac{7}{2}$.

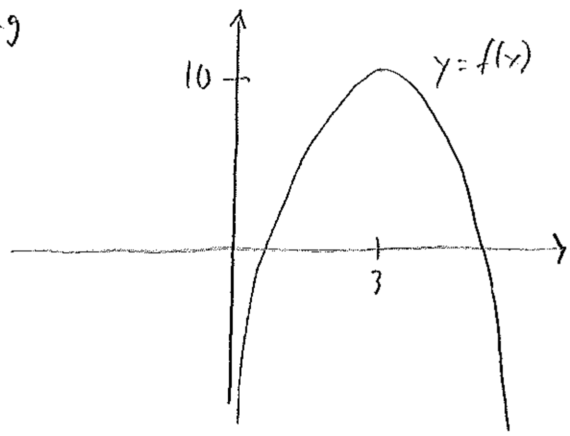
---

4. a) En funktion f sägs vara växande på ett intervall I om

$f(x_1) < f(x_2)$ när $x_1 < x_2$ för $x_1, x_2 \in I$.

b) $$f(x) = -2(x^2-6x+4) \underset{\text{Kvadratkomplettering}}{=} -2\left((x-3)^2-9+4\right) = -2\left((x-3)^2-5\right) =$$

$$= -2(x-3)^2+10$$



Svar: f är växande på $(-\infty, 3]$

och avtagande på $[3, \infty)$.

5. Produktregeln ger

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x)\arctan(x) + x\frac{d}{dx}\arctan(x) =$$

$$= \arctan(x) + \frac{x}{x^2+1}$$

Kvotregeln ger nu

$$f''(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{\frac{d}{dx}(x)(x^2+1) - x\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} + \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+1+x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{(x^2+1)^2}$$

Svar: $f''(x) = \frac{2}{(x^2+1)^2}$

---

6. a) Vikten befinner sig vid jämviktsläget då $s(t)=0$, vilket är uppfyllt då $\sin(t)=0$. Den första tidpunkt då det inträffar är $t=\pi$.

Hastigheten ges av

$$v(t) = s'(t) = -e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t) = e^{-t}(\cos(t)-\sin(t)).$$

$$v(\pi) = e^{-\pi}(\cos(\pi)-\sin(\pi)) = -e^{-\pi}.$$

Svar: Hastigheten är $-e^{-\pi}$ m/s då vikten återvänder till jämviktsläget för första gången.

b) Viktens hastighet är noll om $\cos(t)=\sin(t)$.

Den första tidpunkt då det händer är $t=\frac{\pi}{4}$.

Accelerationen ges av

$$a(t) = v'(t) = -e^{-t}(\cos(t)-\sin(t)) + e^{-t}(-\sin(t)-\cos(t)) =$$

$$= -2e^{-t}\cos(t)$$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2e^{-\frac{\pi}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2e^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Svar: Viktens acceleration är $-\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}}$ m/s^2 då viktens hastighet är noll för första gången.

---

7. a) $f(x)$ är definierad om $x^4-2x^3>0$ och $x>0$.

$x^3(x-2)>0$ och $x>0$.

Teckentabell

		0		2	
x^3	$-$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$+$
$x^3(x-2)$	$+$		$-$		$+$

Svar: $f(x)$ är definierad för $x\in(2,\infty)$.

b) $\ln(x^4-2x^3)-2\ln(x)=1$

$\ln(x^4-2x^3)-\ln(x^2)=1$

$\ln\left(\frac{x^4-2x^3}{x^2}\right)=1$

$\ln(x^2-2x)=1$

$x^2-2x=e$

$x^2-2x-e=0$

p-q-formeln ger

$x=1\pm\sqrt{1+e}$

$x_1=1+\sqrt{1+e}$ och $x_2=1-\sqrt{1+e}$

Eftersom $e>0$, så är $x_1>2$ och $x_2<0$.

Enligt a)-uppgiften är $f(x)$ endast definierad då $x>2$.

x_1 är därför den enda lösningen.

Svar: $x=1+\sqrt{1+e}$ löser ekvationen.

---

8. a) $\lim_{x\to a} f(x)=L$ om det för alla $\varepsilon>0$ existerar $\delta>0$

så att $0<|x-a|<\delta$ medför $|f(x)-L|<\varepsilon$.

b) Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Sätt $f(x) = 3x-5$.

$|f(x)-1| = |3x-5-1| = |3x-6| = 3|x-2|$.

Välj $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Då gäller

$0 < |x-2| < \delta$ medför $|f(x)-1| = 3|x-2| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Det följer att $\lim_{x \to 2} 3x-5 = 1$.

---

9) a) $f(x)$ är kont. i $x=1$ om $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2-2x+2 = 1 = f(1)$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \cos(ax) = \cos(a)$$

Om $\cos(a) = 1$, så är $f(x)$ kont. i $x=1$.

$\cos(a) = 1$ då $a = 2\pi n$ för $n \in \mathbb{Z}$.

Svar: $f(x)$ är kont. i $x=1$ om $a = 2\pi n$ för $n \in \mathbb{Z}$.

b) $f(x)$ är deriverbar i $x=1$ om $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ existerar.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)^2-2(1+h)+2-1}{h} = \frac{d}{dx}(x^2-2x+2)\Big|_{x=1} = 2x-2\Big|_{x=1} = 0.$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\cos(a(1+h))-1}{h} = \frac{d}{dx}(\cos(ax))\Big|_{x=1} = -a\sin(ax)\Big|_{x=1} =$$

$$= -a\sin(a)$$

Gränsvärdet $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ existerar om $-a\sin(a) = 0$.

Eftersom en deriverbar funktion är kont., så är

$a = 2\pi n$ de enda värden på a som är av intresse.

Alla dessa värden ger $\sin(a) = 0$.

Svar: $f(x)$ är deriverbar i $x = 1$ om $a = 2\pi n$ för $n \in \mathbb{Z}$.

10.) Derivera $x^2 + y^2 = 25$ implicit med avseende på x.

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx} 25$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$2yy' = -2x$$

$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Lutningen på tangenten i $(3, -4)$ blir

$$k = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

Tangenten ges av $y = \frac{3}{4}x + m$. Sätt in punkten $(3, -4)$

$$-4 = \frac{3}{4} 3 + m$$

$$m = -4 - \frac{9}{4} = -\frac{16}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{25}{4}$$

Tangenten har ekvationen $y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$

De x som tangenten skär parabeln $y = x^2 + \frac{15}{4}x - a$

ges av ekvationen

$$x^2 + \frac{15}{4}x - a = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}.$$

$$x^2 + \frac{15}{4}x - \frac{3}{4}x - a + \frac{25}{4} = 0$$

$$x^2 + 3x - a + \frac{25}{4} = 0$$

p-q-formeln ger

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + a - \frac{25}{4}}$$

Endast en skärningspunkt fås då $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + a - \frac{25}{4} = 0.$

$$\frac{9}{4} + a - \frac{25}{4} = 0$$

$$a = \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Svar: Tangentens ekvation till cirkeln $x^2 + y^2 = 25$ i punkten $(3, -4)$ ges av $y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$. När $a = 4$ kommer tangenten skära parabeln $y = x^2 - \frac{15}{4}x - a$ exakt en gång.