Anonym kod	MVE530 Inledande matematik KI1 2017-12-20	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm ekvationen för den linje som är parallell med $y = \frac{1}{5}x + 17$ och går genom punkten $(3, 2)$. (3p)

Lutningen på den givna linjen är $k_1 = \frac{1}{5}$.

En parallell linje har samma lutning $k_2 = \frac{1}{5}$.

$y = \frac{1}{5}x + m$. Sätt in punkten $(3,2)$

$2 = \frac{1}{5} \cdot 3 + m$

$m = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$

Svar: $y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$

(b) Lös olikheten $|4x - 1| < 3$. (3p)

$$|4x-1| = \begin{cases} 4x-1 & \text{om } x \geq \frac{1}{4} \\ -(4x-1) & \text{om } x < \frac{1}{4} \end{cases}$$

Fall $x \geq \frac{1}{4}$: $4x - 1 < 3$

$4x < 4$

$x < 1$ OK

Fall $x < \frac{1}{4}$: $-4x + 1 < 3$

$-2 < 4x$

$-\frac{1}{2} < x$

Svar: $-\frac{1}{2} < x < 1$

(c) Bestäm inversen till $f(x) = 3 + e^{4x}$. Vad är definitionsmängden för f^{-1}? (3p)

$$y = f(x) = 3 + e^{4x}$$

$$y - 3 = e^{4x}$$

$$\ln(y-3) = 4x$$

$$\frac{1}{4}\ln(y-3) = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\ln(x-3)$$

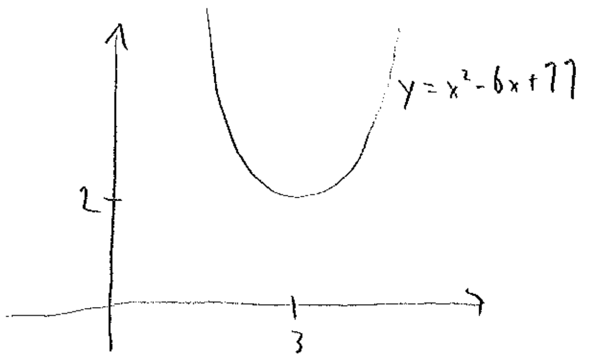
$D_{f^{-1}} = V_f = (3, \infty)$ eftersom $e^{4x} > 0$ för alla x.

Svar: $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\ln(x-3)$ och $D_{f^{-1}} = (3, \infty)$

(d) Beskriv grafen $y = x^2 - 6x + 11$ i termer av translationer av grafen $y = x^2$. (Beskriv det i ord och skissa gärna grafen.) (3p)

Kvadratkomplettering ger

$$y = x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 - 9 + 11 = (x-3)^2 + 2$$



Svar: Grafen $y = x^2 - 6x + 11$ fås från grafen $y = x^2$ genom att flytta grafen 3 steg åt höger och 2 steg uppåt.

2.

a) Kvadratkomplettering ger

$$(x-1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 - 15 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$$

<u>Svar</u>: Centrumpunkten är $(1,-3)$ och radien är 5.

b) Derivera ekvationen implicit med avseende på x

$$2x - 2 + 2yy' + 6y' = 0$$

$$(2y+6)y' = 2 - 2x$$

$$y' = \frac{2-2x}{2y+6} = \frac{1-x}{y+3}$$

I punkten $(4,1)$ får vi lutningen

$$y' = \frac{1-4}{1+3} = -\frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + m$$

Sätt in $(4,1)$

$$1 = -\frac{3}{4}\cdot 4 + m$$

$$m = 1 + 3 = 4$$

<u>Svar</u>: Tangenten till cirkeln i $(4,1)$ ges av $y = -\frac{3}{4}x + 4$.

3. Vi vill beräkna $\lim_{x \to 2} \arccos\left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\right)$.

Låt oss undersöka uttrycket innanför arccos

$$\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)\cdot(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{x-1-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \underset{\text{då } x \to 2}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2-1}+1} = \frac{1}{2}$$

Eftersom $\arccos(x)$ är kontinuerlig i $x = \frac{1}{2}$, kan vi flytta in gränsvärdet

$$\lim_{x \to 2} \arccos\left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\right) = \arccos\left(\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Svar: $\lim_{x \to 2} \arccos\left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

---

4. $f(x) = 2\sin^2(x) - \sqrt{3}x$ för $x \in [0, \pi]$

a) $f'(x) = 2 \cdot 2\sin(x) \cdot \cos(x) - \sqrt{3} = 2\sin(2x) - \sqrt{3}$

$f'(x) = 0$ om $2\sin(2x) - \sqrt{3} = 0$

$$\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \text{ eller } 2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n \text{ eller } x = \frac{\pi}{3} + \pi n$$

De enda som ligger i intervallet $[0, \pi]$ är $x = \frac{\pi}{6}$ och $\frac{\pi}{3}$.

<u>Svar</u>: $f'(x)=0$ då $x=\frac{\pi}{6}$ och $\frac{\pi}{3}$.

b) Lutningen på tangenten ges av $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin(\pi)-\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

$y=-\sqrt{3}x+m$. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{3}\frac{\pi}{2}=2-\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$.

Sätt in punkten $\left(\frac{\pi}{2}, 2-\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\right)$

$$2-\frac{\sqrt{3}\pi}{2}=-\sqrt{3}\frac{\pi}{2}+m$$

$$m=2$$

<u>Svar</u>: Tangentens ekvation ges av $y=-\sqrt{3}x+2$.

---

5. a) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ (om gränsvärdet existerar)

b) $f(x)=x^3$

Binomialsatsen

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}3x^2+3xh+h^2=3x^2$$

<u>Svar</u>: $f'(x)=3x^2$.

6.

$$s(t) = \frac{1}{20}t^5 - \frac{3}{4}t^4 + \frac{10}{3}t^3 - 6t^2 + \frac{8}{3}t + 1$$

a) Hastigheten ges av

$$v(t) = s'(t) = \frac{1}{20}\cdot 5t^4 - \frac{3}{4}\cdot 4t^3 + \frac{10}{3}\cdot 3t^2 - 6\cdot 2t + \frac{8}{3} =$$

$$= \frac{1}{4}t^4 - 3t^3 + 10t^2 - 12t + \frac{8}{3}$$

Accelerationen ges av

$$a(t) = v'(t) = \frac{1}{4}\cdot 4t^3 - 3\cdot 3t^2 + 10\cdot 2t - 12 =$$

$$= t^3 - 9t^2 + 20t - 12$$

$$a(1) = 1 - 9 + 20 - 12 = 0$$

b) $t=1$ är ett nollställe till $a(t)$.

Faktorsatsen ger att $t-1$ är en faktor till $a(t)$.

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{1}{l}{t^2 - 8t + 12} & \\ \hline t^3 - 9t^2 + 20t - 12 & t-1 \\ \underline{t^3 - t^2} & \\ \quad -8t^2 + 20t - 12 & \\ \quad \underline{-8t^2 + 8t} & \\ \qquad\quad 12t - 12 & \\ \qquad\quad \underline{12t - 12} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$a(t) = (t-1)(t^2 - 8t + 12)$$

Lös nu $t^2 - 8t + 12 = 0$.

p-q-formeln ger

$$t = 4 \pm \sqrt{4^2 - 12}$$

$$t = 4 \pm \sqrt{16 - 12}$$

$$t = 4 \pm 2$$

$t_1 = 6$ och $t_2 = 2$

Svar: De resterande tidpunkterna som accelerationen är noll är $t_1 = 6$ och $t_2 = 2$.

7.) Horisontella asymptoter fås då $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 3x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 + \frac{3}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = 3$$

Samma sak gäller då $x \to -\infty$.

$y = 3$ är alltså en horisontell asymptot.

Vertikala asymptoter kan endast förekomma då nämnaren är noll.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

p-q-formeln ger

$$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3}$$

$$x = 2 \pm 1$$

$x_1 = 3$ och $x_2 = 1$

Faktorsatsen ger att $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

Låt oss även faktorisera täljaren.

$$3x^2+3x-6=0$$

$$x^2+x-2=0$$

p-q-formeln ger

$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+2}$$

$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}$$

$$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}$$

$x_1=1$ och $x_2=-2$

Faktorsatsen ger att $3x^2+3x-6=3(x-1)(x+2)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+3x-6}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x+2)}{(x-3)}=\frac{3\cdot 3}{-2}=-\frac{9}{2}$$

$x=1$ är ingen vertikal asymptot.

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{3x^2+3x-6}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{3(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 3^+}\frac{3(x+2)}{(x-3)}=\infty$$

$x=3$ är en vertikal asymptot.

Svar: $y=3$ är en horisontell asymptot och

$x=3$ är en vertikal asymptot.

8. a) Låt $f(x)$ vara en kontinuerlig funktion på $[a,b]$ och $f(a) \neq f(b)$. För varje N mellan $f(a)$ och $f(b)$ så finns ett $c \in (a,b)$ så att $f(c) = N$.
(Eller f antar alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$)

b) Låt $f(x) = \arcsin(x) + x + 1$.

f är kontinuerlig på $[-1, 1]$ och

$$f(-1) = \arcsin(-1) - 1 + 1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(1) = \arcsin(1) + 1 + 1 = \frac{\pi}{2} + 2.$$

Eftersom 0 ligger mellan dessa två värden, så ger satsen om mellanliggande värden att det finns $c \in (-1, 1)$ så att $f(c) = 0$.
Det finns alltså minst en lösning till

$$\arcsin(x) + x + 1 = 0. \qquad \blacksquare$$

9.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x < 0 \\ \dfrac{x-1}{x^2-4x+3} & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x^2-4x+3} = -\frac{1}{3}$$

f är diskontinuerlig i $x = 0$.

Titta på $\frac{x-1}{x^2-4x+3}$ för $x \geq 0$.

f är diskontinuerlig om nämnaren är noll.

$x^2-4x+3=0$

p-q-formeln ger

$x = 2 \pm \sqrt{4-3}$

$x = 2 \pm 1$

$x_1 = 3$ och $x_2 = 1$

f är diskont. i $x=1$ och $x=3$.

I $x=1$ gör f ett hopp, så vi har en hoppdiskontinuitet där.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{2}$$

Vi kan definiera $f(1) = -\frac{1}{2}$ och ta bort diskontinuiteten i $x=1$. Därför är $x=1$ en hävbar diskontinuitet.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x-1}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}$$ existerar inte

$f(x)$ går mot ∞ eller $-\infty$ i $x=3$ beroende på ifall vi går från höger eller vänster.

$x=3$ är en oändlig diskontinuitet.

10. Gör omskrivningen

$$f(x) = x^{e^x} = e^{\ln\left(x^{e^x}\right)} = e^{e^x \ln(x)}$$

$$f'(x) = e^{e^x \ln(x)} \cdot \left(e^x \ln(x)\right)' = x^{e^x}\left(e^x \ln(x) + e^x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

Svar: $f'(x) = x^{e^x}\left(e^x \ln(x) + \frac{e^x}{x}\right)$.