Anonym kod	MVE530 Inledande matematik KI1 2018–08–21	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm derivatan till $f(x) = \ln(\cos(x))$. (3p)

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{d}{dx}(\cos(x)) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

Svar: $f'(x) = -\tan(x)$

(b) Bestäm definitionsmängd och värdemängd till inversen av $f(x) = 3 + \sqrt{5-x}$. (3p)

$D_{f^{-1}} = V_f$ och $V_{f^{-1}} = D_f$

$f(x)$ är definierad om $5 - x \geq 0$, alltså $x \leq 5$.

$f(x)$ blir som minst 3, eftersom $\sqrt{5-x} \geq 0$.

Svar: $D_{f^{-1}} = [3, \infty)$ och $V_{f^{-1}} = (-\infty, 5]$

(c) Förenkla uttrycket $\ln(\frac{1}{x-1}) + \ln(x^2 - 3x + 2) + \ln(x-2)^2$. (3p)

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$

$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

$x_1 = 2 \quad x_2 = 1$

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$\ln(\frac{1}{x-1}) + \ln(x^2-3x+2) + \ln(x-2)^2 =$

$= \ln(x-1)^{-1} + \ln((x-1)(x-2)) + 2\ln(x-2) =$

$= -\ln(x-1) + \ln(x-1) + \ln(x-2) + 2\ln(x-2) =$

$= 3\ln(x-2)$

Svar: $3\ln(x-2)$

(d) Låt $f(x) = x^3\cos(x)$ och $g(x) = \ln(\sin(x) + 2))$. Avgör om f och g är udda, jämna eller ingetdera. Motivera ditt svar! (3p)

$f(-x) = (-x)^3 \cos(-x) = -x^3\cos(x) = -f(-x)$ f är udda

$g(\frac{\pi}{2}) = \ln(\sin(\frac{\pi}{2}) + 2) = \ln(3)$

$g(-\frac{\pi}{2}) = \ln(\sin(-\frac{\pi}{2}) + 2) = \ln(1) = 0$

g är därför varken udda eller jämn.

Svar: f är udda, g är varken udda eller jämn.

2.

$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{om} \quad x \geq 5 \\ -(x-5) & \text{om} \quad x < 5 \end{cases}$$

Fall $x \geq 5$:

$$x - 5 < 3x + 4$$
$$-9 < 2x$$
$$-\frac{9}{2} < x$$

Därför uppfyller alla $x \geq 5$ olikheten.

Fall $x < 5$:

$$-x + 5 < 3x + 4$$
$$1 < 4x$$
$$\frac{1}{4} < x$$

Alla $x \in \left(\frac{1}{4}, 5\right)$ uppfyller olikheten.

Svar: Olikheten gäller för $x \in \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

---

3. Vi vill beräkna $\lim_{x \to 9} \sqrt{\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}}$.

Betrakta först uttrycket

$$\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konjugatregeln}}}{=} \frac{\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{då } x \to 9}}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{6}$$

Eftersom $\sqrt{x}$ är kontinuerlig i $\frac{1}{6}$, kan vi flytta in gränsvärdet.

$$\lim_{x \to 9} \sqrt{\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}} = \sqrt{\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Svar: $\lim_{x \to 9} \sqrt{\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

---

4. a) Derivera $f(x) = \sqrt{x^3+1}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \cdot \frac{d}{dx}(x^3+1) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

Lutningen på tangenten ges av

$$k_1 = f'(2) = \frac{3 \cdot 4}{2\sqrt{8+1}} = 2.$$

Eftersom $f(2) = 3$, så går tangenten genom $(2,3)$ och har formen $y = 2x + m_1$. Sätt in $(2,3)$.

$$3 = 2 \cdot 2 + m_1$$

$$m_1 = -1$$

Svar: Tangenten ges av $y = 2x - 1$.

b) En linje $y = k_2 x + m_2$ är vinkelrät mot linjen i a) om $k_1 \cdot k_2 = -1$, $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{2}$.

$y = -\frac{1}{2}x + m_2$. Sätt in punkten $(2,3)$

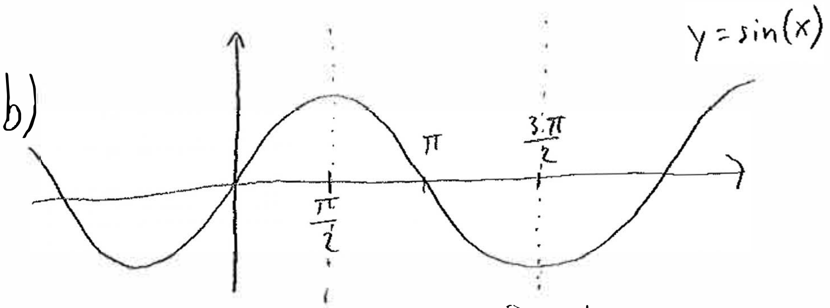
$$3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + m_2$$

$$m_2 = 4$$

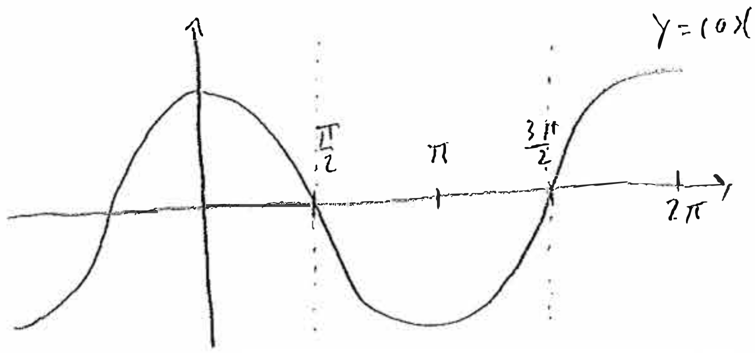
Svar: Linjen $y = -\frac{1}{2}x + 4$ är vinkelrät mot tangenten $y = 2x - 1$ och går genom tangeringspunkten.

5. a) En funktion $f(x)$ sägs vara injektiv om $f(x_1) \neq f(x_2)$ då $x_1 \neq x_2$.

b)



På intervallet $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ kommer ingen horisontell linje skära $y = \sin(x)$ fler än en gång. $\sin(x)$ är injektiv på det givna intervallet.



Eftersom $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, är inte $\cos(x)$ injektiv på $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Svar: $\sin(x)$ är injektiv på $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, men $\cos(x)$ är inte injektiv på $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

6. Hastigheten ges av

$$v(t) = s'(t) = 2\cos(t) \cdot \frac{d}{dt}\cos(t) = -2\cos(t)\sin(t) = -\sin(2t).$$

Accelerationen ges av

$$a(t) = v'(t) = -2\cos(2t).$$

Accelerationen är noll om $\cos(2t) = 0$.

Det sker då $2t = \frac{\pi}{2} + n\pi$ för $n \in \mathbb{Z}$.

$$t = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$$

Svar: Accelerationen är noll då $t = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$ för $n \in \mathbb{Z}$.

---

7. Horisontella asymptoter fås då $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2|x|^3+1}{x^3-1} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+1}{x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}} = 2$$

$|x| = x$ då $x > 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2|x|^3+1}{x^3-1} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3+1}{x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}} = -2$$

$|x| = -x$ då $x < 0$

Vi får därför två horisontella asymptoter,

$y = 2$ (då $x \to \infty$) och $y = -2$ (då $x \to -\infty$).

Vertikala asymptoter kan endast förekomma då nämnaren är noll.

$x = 1$ är det enda reella nollstället till $x^3 - 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2|x|^3+1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^3+1}{x^3-1} = \infty$$

$x=1$ är en vertikal asymptot.

Svar: $y=2$ och $y=-2$ är horisontella asymptoter till $y=\frac{2|x|^3+1}{x^3-1}$ och $x=1$ är en vertikal asymptot.

---

8. $\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Bevis: $\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)} \underbrace{g(x+h)}_{\to g(x)} + f(x) \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)} =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$\blacksquare$

---

9. a) f är kontinuerlig i $x=3$ om $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} x^2-8 = 1$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{x-2} = 1$$

$\lim_{x\to 3} f(x)$ existerar och är lika med $f(3)=1$.

Svar: f är kontinuerlig i $x=3$.

b) f är deriverbar i $x=3$ om $\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ existerar.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(3+h)^2-8-1}{h} = \frac{d}{dx}(x^2-8)\Big|_{x=3} = 2x\Big|_{x=3} = 6$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{(3+h)-2}-1}{h} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x-2}\right)\Big|_{x=3} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}\Big|_{x=3} = \frac{1}{2}$$

Vänster och höger gränsvärde överensstämmer inte.
f är därför inte deriverbar i $x=3$.

Svar: f är inte deriverbar i $x=3$.

---

10. För att bestämma x-koordinaten för den aktuella punkten sätter vi in $y=1$ i ekvationen

$$x^2-3x+1-1=0$$
$$x^2-3x=0$$
$$x(x-3)=0$$
$$x=0 \text{ eller } x=3$$

$x=3$ är det enda värdet som är större än noll.
Vi söker tangenten i punkten $(3,1)$.

Derivera kurvans ekvation implicit med avseende på x.

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 - 3xy + y^3 - 1\right) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2x - 3y - 3xy' + 3y^2y' = 0$$

$$y'(3y^2 - 3x) = 3y - 2x$$

$$y' = \frac{3y - 2x}{3y^2 - 3x}$$

Lutningen på tangenten i $(3, 1)$ ges av

$$k = \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 3}{3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

Tangentens ekvation ges av $y = \frac{1}{2}x + m$.

Sätt in punkten $(3, 1)$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 3 + m$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

Svar: Tangentens ekvation ges av $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.