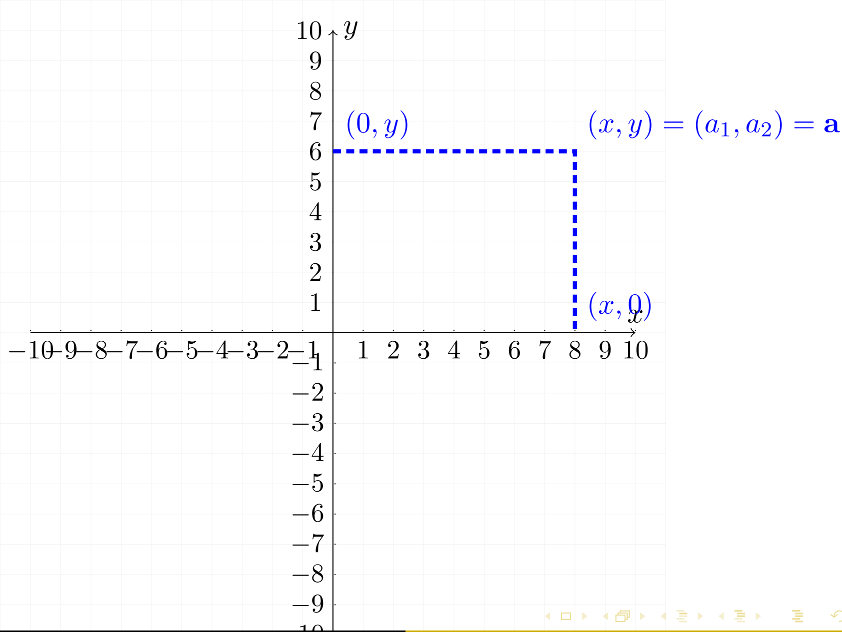
Analytisk geometri

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve530/1819

September 11, 2018

Punkter i planet $\mathbb{R}^2$



Affina rummet $\mathbb{R}^2$

Vi kan definera addition av element i $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} := (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \qquad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2.$$

Detta ger en **affin** struktur på $\mathbb{R}^2$. Den ger att

1. för varje par $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ finns en unik linje från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{b}$, och
2. vi kan definera "lutningen" på en linje i $\mathbb{R}^2$.

Definition

Låt $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ och $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ vara två punkter i planet, och antag att $a_1 \neq b_1$. **Lutningen** på linjen mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är det reella talet

$$m(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}.$$

Notera att

$$m(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = m(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = m(0, \mathbf{a} - \mathbf{b})$$

och

$$m(\mathbf{a}, -\mathbf{b}) = \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} = -\frac{-a_2 - b_2}{-a_1 - b_1} = -m(-\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

NB: Ibland kallas $|m|$ lutningen medan $m = \mathrm{sign}(m)|m|$ kallas **riktningskoefficienten** för linjen.

Linjer genom origo – vektorer

En punkt $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ i $\mathbb{R}^2$ kan ses som en vektor, nämligen som det riktade linjesegmentet från $(0,0)$ till $\mathbf{a}$. Detta har längd

$$\|\mathbf{a}\| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

och lutning

$$m(0, \mathbf{a}) = \frac{a_2}{a_1}.$$

Linjen som passerar mellan 0 och $\mathbf{a}$ betecknas

$$\mathbb{R}\mathbf{a} := \{(\lambda a_1, \lambda a_2) | \; \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

När vi kräver att alla vektorer utgår från origo på det här sättet blir $\mathbb{R}^2$ ett **vektorrum**.

Avstånd

Definition

Avståndet mellan två element $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^2$ är det ickenegativa talet

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) := \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}.$$

Notera att

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0 \iff \mathbf{a}=\mathbf{b}.$$

Vektorrummet $\mathbb{R}^2$ tillsammans med avståndsfunktionen d (eller normen $\|\cdot\|$) kallas **euklidiska** $\mathbb{R}^2$.
Den konkreta modellen för euklidisk geometri med cartesiska koordinater kallas **analytisk geometri**.

Ekvationen för en linje i planet

Givet en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ och ett reelt tal $m \in \mathbb{R}$, betrakta mängden

$$\{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 |\ m(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = m\}.$$

Detta är linjen med lutning m som går genom punkten $\mathbf{a}$. Vi kan skriva den som

$$\left\{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \middle|\ \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} = m\right\} = \left\{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \middle|\ a_2 - b_2 = (a_1 - b_1)m\right\}.$$

Ibland säger man att

$$y - a_2 = (x - a_1)m$$

är "ekvationen för linjen i (x, y)-planet med lutning m som går genom punkten (a_1, a_2)".

Skärningspunkt

Om linjen inte är lodrät så innehåller den en punkt av typen $(0, a_2)$. Och om vi har $a_1 = 0$ i linjeekvationen $y - a_2 = (x - a_1)m$ har vi

$$y = mx + a_2.$$

Omvänt så ger den här formen på linjeekvationen direkt att linjen skär y-axeln $x = 0$ i punkten $(0, a_2)$. (Svengelska: a_2 är linjens y-**intercept**.)

Skärningspunkt

Om linjen inte är vågrät så innehåller den en punkt av typen $(a_1, 0)$. Och om vi tar $a_2 = 0$ i linjeekvationen $y - a_2 = (x - a_1)m$ får vi

$$x = \frac{1}{m}y + a_1.$$

Omvänt så ger den här formen på linjeekvationen direkt att linjen skär x-axeln $y = 0$ i punkten $(a_1, 0)$. (Svengelska: a_1 är linjens x-**intercept**.)

Ekvationen för en linje i planet

Varje ekvation av typen

$$ax + by + c = 0,$$

där x och y ses som coordinater i planet och a, b, c är rella tal, definerar en linje i $\mathbb{R}^2$. Om vi skriver ekvationen som

$$y = -(a/b)x - c/b,$$

så ser vi att linjen har lutning $m = -a/b$ och y-intercept $-c/b$.

Proposition

Två icke-lodräta linjer med lutning m_1 och m_2 är vinkelräta om och endast om

$$m_1 m_2 = -1.$$

Bevis.

Vi kan anta att skärningspunkten för de två linjerna är origo $(0,0)$. Då är linjerna på formen $\mathbb{R}\mathbf{a}$ och $\mathbb{R}\mathbf{b}$. De är vinkelräta omm

$$0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Vi har $m_1 = a_2/a_1$ och $m_2 = b_2/b_1$ så linjerna är vinkelräta omm

$$0 = a_1 b_1 + m_1 a_1 m_2 b_1 = (1 + m_1 m_2) a_1 b_1.$$

Eftersom m_1 och m_2 är reella tal så är $a_1 \neq 0 \neq b_1$. $\square$

Exempel

Hitta linjen genom origo som är vinkelrät mot linjen genom två givna punkter $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$.

Lösning.

Linjen vi söker har lutningen

$$\mu := -\frac{1}{m(\mathbf{a},\mathbf{b})} = \frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2}.$$

Vi vet att $(0,0)$ är en punkt på linjen vi söker. Så den sökta linjens ekvation är

$$y - 0 = (x - 0)\mu,$$

det vill säga

$$y = \frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2}x.$$

Definition

Tre punkter $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är **kolinjära** om de ligger på en och samma linje.

Notera att $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är kolinjära om och endast om

$$m(\mathbf{a},\mathbf{b}) = m(\mathbf{a},\mathbf{c}) = m(\mathbf{b},\mathbf{c}).$$

Alltså kolinjäritet en affin egenskap.
Dock, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ är kolinjära med $\mathbf{b}$ liggande mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{c}$ om och endast om

$$d(\mathbf{a},\mathbf{c}) = d(\mathbf{a},\mathbf{b}) + d(\mathbf{b},\mathbf{c}).$$

Definition

Enhetscirkeln är delmängden $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ definerad som

$$\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Detta är mängden av vektorer av längd 1 (punkter på avstånd 1 från origo),

$$\mathbb{S}^1 = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 | \ \|\mathbf{a}\| = 1\}.$$

På samma sätt kan vi definera en cirkel centrerad i punkten $\mathbf{c}$ med radius r om

$$\mathbb{S}^1_r(\mathbf{c}) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2\}.$$

Exempel

Visa att ekvationen $x^2 + 4x + y^2 - 10y + 20 = 0$ definerar en cirkel, och bestäm dess center och radius.

Lösning.

Kvadratkomplettering ger att $x^2 + 4x + y^2 - 10y + 20$ är samma som

$$(x+2)^2 - 4 + (y-5)^2 - 25 + 20 = (x+2)^2 + (y-5)^2 - 9.$$

Så ekvationen är $(x+2)^2 + (y-5)^2 - 9 = 0$, dvs

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 3^2.$$

Detta beskriver en cirkel $\mathbb{S}^1_r(\mathbf{c})$ med center $\mathbf{c} = (-2, 5)$ och radius $r = 3$. $\square$