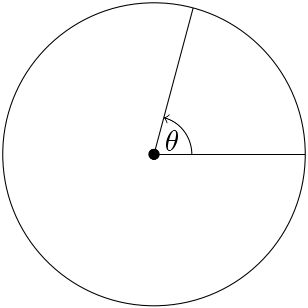
Trigonometri

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve530/1819

September 12, 2018

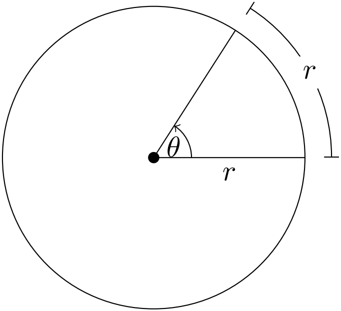
Enhetscirkeln

Ekvationen $x^2 + y^2 = 1$ definerar **enhetscirkeln** i $\mathbb{R}^2$. Den är centrerad i origo och har radius 1. Vi mäter vinklar θ i enhetscirkeln som utmynnar från den positiva x-axeln och ökar under förflyttning motsols.



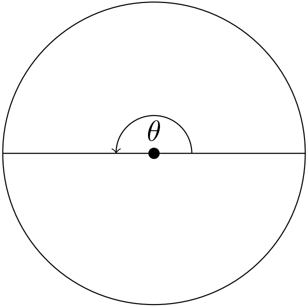
Vinklar tillåts vara större en ett helt varv. Vi kan också ange negativa vinklar genom att mäta medsols.

Den matematiskt sett mest naturliga enheten för vinklar är **radianer**.



En radian är vinkeln vars båglängd är lika med cirkelns radius r.
Så ett helt varv motsvarar 2π radianer.
Varje reellt tal $\theta \in \mathbb{R}$ ger en vinkel. Vanligtvis nöjer man sig dock med vinklar i intervallet $[0, 2\pi)$ eller $(-\pi, \pi]$.

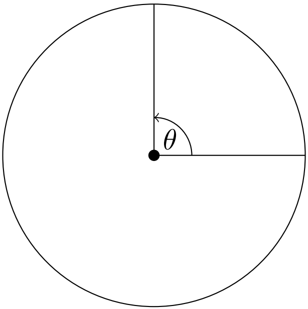
Några vanliga vinklar



Vinkel

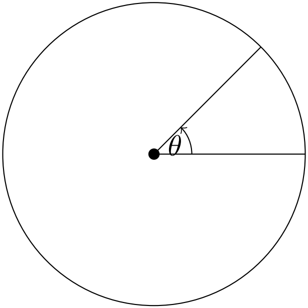
$$\theta = \pi \text{ radianer} = 180 \text{ grader}$$

Några vanliga vinklar



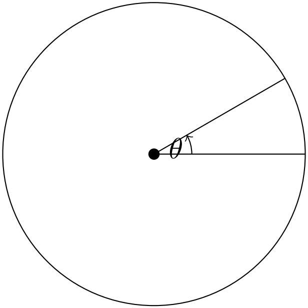
Vinkel

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ radianer} = 90 \text{ grader}$$



Vinkel

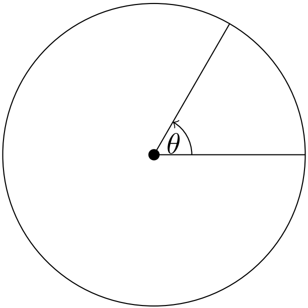
$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ radianer} = 45 \text{ grader}$$



Vinkel

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ radianer} = 30 \text{ grader}$$

Några vanliga vinklar

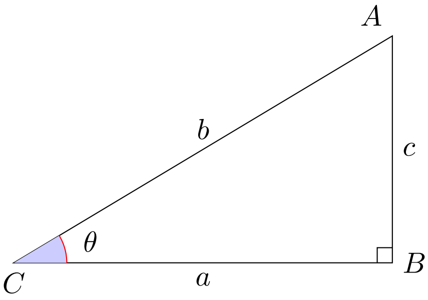


Vinkel

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ radianer} = 60 \text{ grader}$$

Sinus och cosinus från trianglar

Betrakta en rät triangel:



Definition

Vi definerar $\sin(\theta) := c/b$ och $\cos(\theta) := a/b$ samt

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}, \qquad \forall \theta \notin \{k\pi/2|\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Radianer eller grader

Säg att vi definerade $\sin(\theta)$ och $\cos(\theta)$ där θ är värdet för vinkeln i grader. Då kan vi använda isomorfismen

$$\mathrm{grad} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{grad}(x) := \frac{180}{\pi}x$$

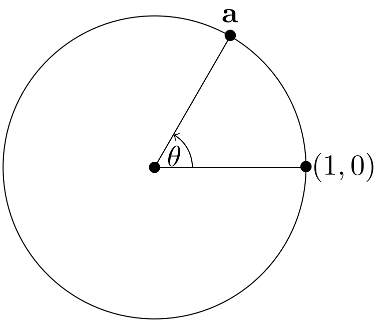
for att definera

$$\widetilde{\sin}(x) := \sin(\mathrm{grad}(x)), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Då är $\widetilde{\sin}(\theta)$ den korrekta sinusfunktionen om θ mäts i radianer. Vanligtvis är det $\widetilde{\sin}(\theta)$ vi använder och vi skriver bara $\sin(\theta)$ hursomhelst.

Trigonometri i enhetscirkeln

Låt θ vara en vinkel i enhetscirkeln och låt $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ vara enhetsvektorn i figuren.



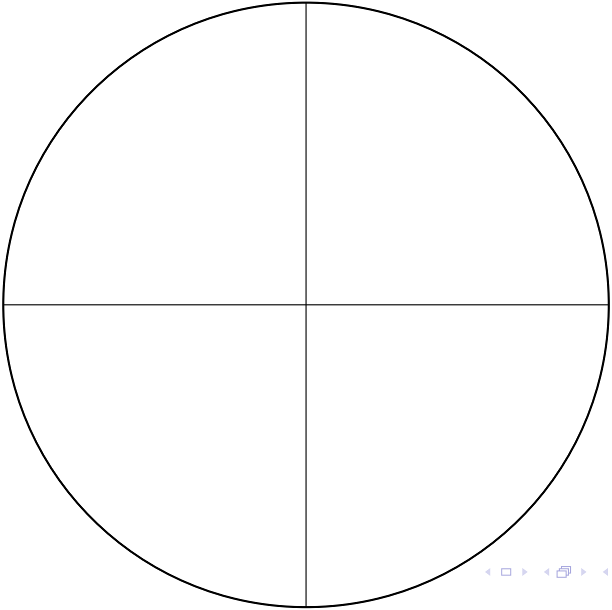
Skåda

$\sin(\theta)$ är y-koordinaten till $\mathbf{a}$ och $\cos(\theta)$ är x-coordinaten till $\mathbf{a}$,

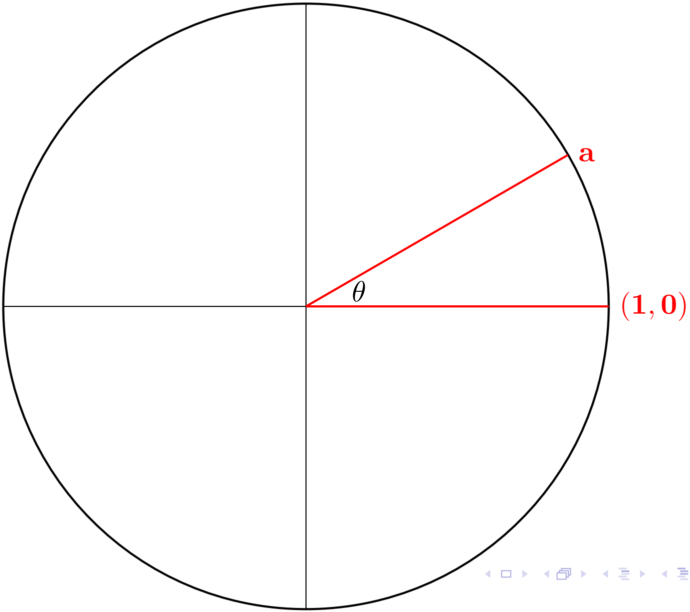
$$a_1 = \cos(\theta), \qquad a_2 = \sin(\theta),$$

medan $\tan(\theta)$ är lutningen a_2/a_1.

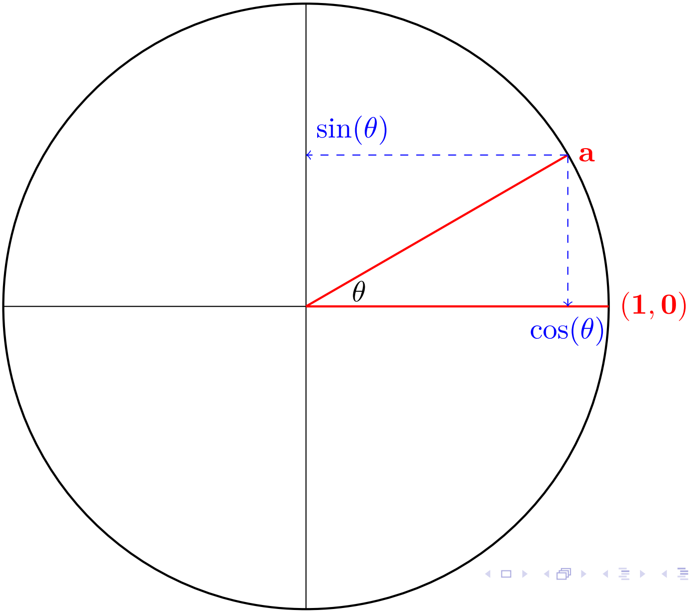
Trigonometri i enhetscirkeln

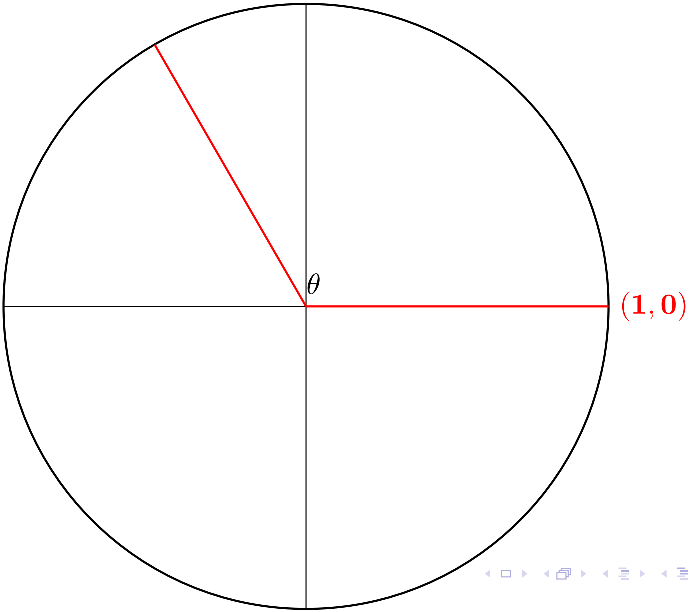


Trigonometri i enhetscirkeln

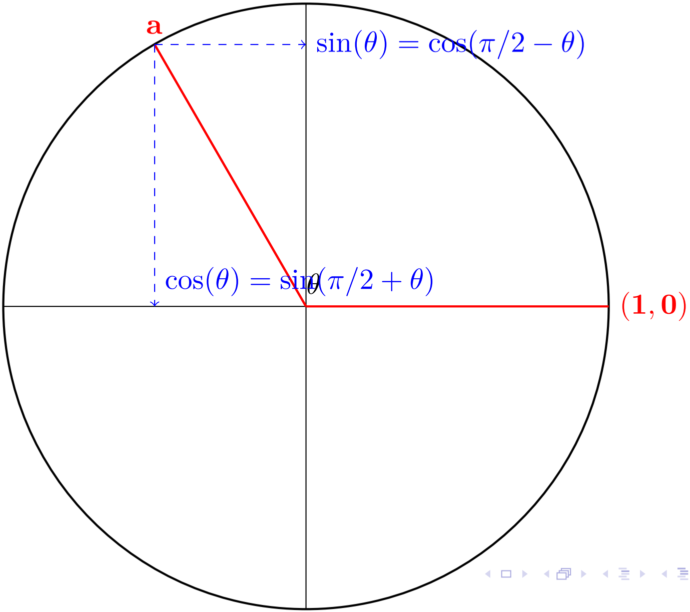


Trigonometri i enhetscirkeln

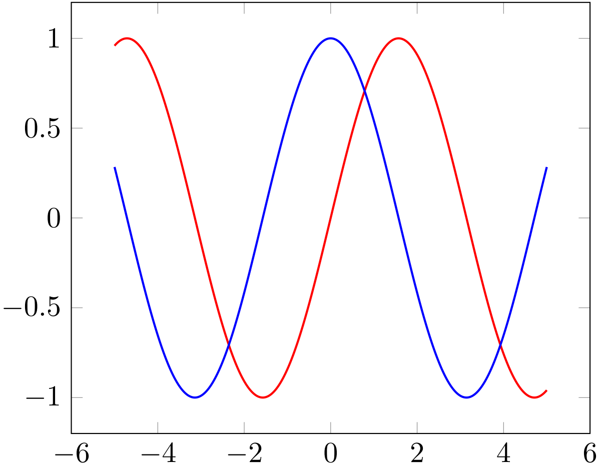



θ
$(\mathbf{1}, \mathbf{0})$

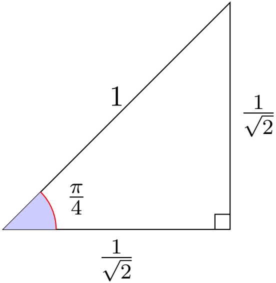
Trigonometri i enhetscirkeln



Grapherna till $\sin(x)$ och $\cos(x)$



Betrakta en triangel där två sidor är lika långa och den tredje har längd 1:

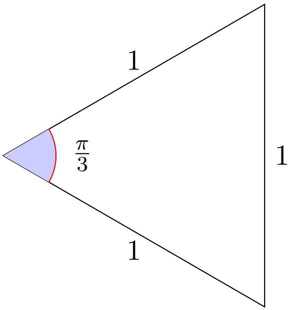


Vi får:

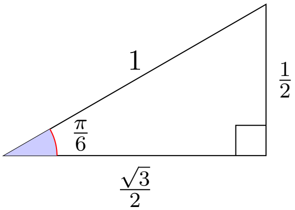
Vinkeln $\pi/4$

$$\sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{och} \quad \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

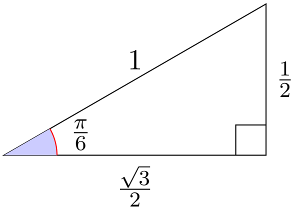
Betrakta en triangel där alla sidor har längd 1.



Betrakta en triangel där alla sidor har längd 1. Sedan skär den itu.



Betrakta en triangel där alla sidor har längd 1. Sedan skär den itu.



Observera att $\pi/2 - \pi/6 = \pi/3$. Från detta:

Vinklarna $\pi/6$ och $\pi/3$

$$\sin(\pi/6) = \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

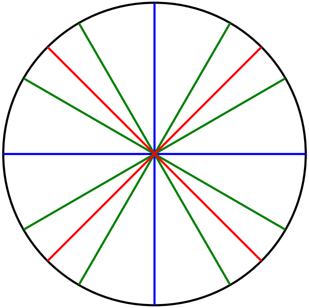
såväl som

$$\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{och} \quad \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$$

Genom att använda cirkelns symmetri kan man hitta varje trigonometrisk funktions värde i följande vinklar:

Standardvinklar

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}.$$



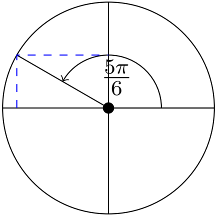
Övning

Beräkna $\tan(\frac{17\pi}{6})$.

Lösning: Vinkeln $\frac{17\pi}{6}$ ligger inte i $[0, 2\pi)$, men vi har

$$\tan(\frac{17\pi}{6}) = \tan(\frac{17\pi}{6} - 2\pi) = \tan(\frac{5\pi}{6})$$

Ritat i enhetscirkeln ser denna vinkel ut så här:



Från detta ser vi att $\sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ och $\cos(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, så

$$\tan(\frac{17\pi}{6}) = \tan(\frac{5\pi}{6}) = \frac{\sin(\frac{5\pi}{6})}{\cos(\frac{5\pi}{6})} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Trigonometriska formler

Formler

For alla vinklar θ, α, och β har vi

- $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ (Pythagoras sats)
- $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ (jämn) och $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ (udda)
- $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$ och $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$
- $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$ och $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$ samt $\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$ (periodicitet)
- $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos(\theta)$ och $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta)$ (komplementär vinkel)
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

Exempel

Övning

Hitta $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Lösning: Notera först att $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$. Med hjälp av additionsregeln för sinus får vi

$$\sin(\tfrac{\pi}{12}) = \sin(\tfrac{\pi}{4} + (-\tfrac{\pi}{6})) = \sin(\tfrac{\pi}{4})\cos(-\tfrac{\pi}{6}) + \cos(\tfrac{\pi}{4})\sin(-\tfrac{\pi}{6})$$

$$= \sin(\tfrac{\pi}{4})\cos(\tfrac{\pi}{6}) - \cos(\tfrac{\pi}{4})\sin(\tfrac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Approximation med polynom

För alla $x \in \mathbb{R}$ har vi

$$\sin(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

Approximationen

$$\sin(x) \approx x$$

är god för små x.