# Lösningar 190108

1 a) $f'(x) = \frac{1}{\cos(3x)} \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3 = -3\tan(3x)$.

b) Polynomdivision

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x - 1 \\
\hline
x-1 & x^3 - 3x^2 + x + 1 \\
 & -(x^3 - x^2) \\
\hline
 & -2x^2 + x + 1 \\
 & -(-2x^2 + 2x) \\
\hline
 & -x + 1 \\
 & -(-x + 1) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Lös $x^2 - 2x - 1 = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{2}$

Så

$P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1 =$

$= (x-1)(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))$

c) $$\frac{x^3 + x^2 - 3x + 2}{4 - x^2 + 3x^3} = \frac{x^3\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(3 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}\right)} =$$

$$= \frac{1 + \overset{\to 0}{\frac{1}{x}} - \overset{\to 0}{\frac{3}{x^2}} + \overset{\to 0}{\frac{2}{x^3}}}{3 - \underset{\to 0}{\frac{1}{x}} + \underset{\to 0}{\frac{4}{x^3}}} \to \frac{1}{3} \quad \text{då } x \to \infty$$

d) $V_f = (3, \infty) = D_{f^{-1}}$

$y = 3 + e^{2x} \Rightarrow e^{2x} = y - 3 \Rightarrow x = \frac{\ln(y-3)}{2}$

så: $f^{-1}(x) = \frac{\ln(x-3)}{2}$

e) $$\frac{\sqrt{3(x+h)+1} - \sqrt{3x+1}}{h} = \frac{3(x+h)+1-(3x+1)}{h\left(\sqrt{3(x+h)+1} + \sqrt{3x+1}\right)} =$$

$$= \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{3(x+h)+1} + \sqrt{3x+1}\right)} \to \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \quad \text{då } h \to 0$$

2.a) $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 15$

$\iff$

$(x-1)^2 - 1^2 + (y+3)^2 - 3^2 = 15$

$\iff$

$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 5^2$

m.p $= (1,-3)$ radie $= 5$

b) Implicit derivering ger

$2x - 2 + 2yy' + 6y' = 0$

Insättning av punkten $(4,1)$ ger

$8 - 2 + 2 \cdot 1 \cdot y'(4) + 6y'(4) = 0$

$8y'(4) = -6$

$y' = -\frac{3}{4}$

Så

$y = -\frac{3}{4}x + m$

Insättning av punkten $(4,1)$ ger

$1 = -\frac{3}{4} \cdot 4 + m \iff m = 4$

$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 4$

3. $f'(x) = 4\sin x\cos x - \sqrt{3} =$

$$= 2\cdot \underbrace{2\sin x \cos x}_{=\sin(2x)} - \sqrt{3} = 2\sin(2x) - \sqrt{3}$$

<u>Lös $f'(x) = 0$</u>

$$2\sin(2x) - \sqrt{3} = 0 \iff \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

I. $2x = \frac{\pi}{3} + n2\pi$

$x = \frac{\pi}{6} + n\pi$

II. $\cancel{\sin}(2x) = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + n2\pi$

$2x = \frac{2\pi}{3} + n2\pi$

$x = \frac{\pi}{3} + n\pi$

---

4. $$\frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} = \frac{(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \to \frac{1}{2} \text{ då } x \to 2$$

<u>Så</u>

$$\lim_{x\to 2} \arccos\left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\right) =$$

$$\arccos\left(\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\right) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

5. $y' = e^{\sqrt{\cos x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x^2}} \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x$

6. a) $y = \frac{\sin(x+4)}{x+4} \to 0$ då $x \to \pm\infty$

så $y = 0$ vågrät asymptot

$\frac{\sin(x+4)}{x+4} \to 1$ då $x \to -4$ (så ingen lodrät asymptot)

b) lodrät asymptot $x = 2$. Visa!

Vidare

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1-\frac{2}{x})} = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-2/x} & x > 0 \\ -\frac{\sqrt{1+1/x^2}}{1-2/x} & x < 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} 1 & \text{då } x \to \infty \\ -1 & \text{då } x \to -\infty \end{cases}$$

Så vågrät asymptot $y = 1$ då $x \to \infty$

och $y = -1$ då $x \to -\infty$

7. a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ om det för alla $\varepsilon > 0$

existerar $\delta > 0$ så att

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

b) Låt $\varepsilon$ vara givet. sätt: $f(x) = 4x-1$

$|f(x) - 3| = |4x-1-3| = 4|x-1|$

Välj $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$. Då gäller

$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| = 4|x-1| < 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$.

Det följer att $\lim_{x \to 1} (4x-1) = 3$.

---

8. $f_1'(x) = -a\sin(ax)$

$f_1'^{-}(1) = -a\sin a$

$f_2'(x) = 2x - 2$

$f_2'^{+}(1) = 0$

$f_1'^{-}(1) = f_2'^{+}(1)$

$-a\sin a = 0$

$\sin a = 0$

$a = n\cancel{2}\pi$

ty f är kontinuerlig endast då $\cos a = 1$ vilket är då $a = n2\pi$

---

9. $y = 3\arcsin x$

$\Leftrightarrow x = \sin(\frac{y}{3})$

Implicit derivering ger

$1 = \cos(\frac{y}{3}) \cdot \frac{y'}{3}$

Så

$y' = \frac{3}{\cos(\frac{y}{3})} = \frac{3}{\sqrt{1-\sin^2(\frac{y}{3})}}$

$= \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$.