Anonym kod	MVE535/MVE415 Matematisk analys, del 1 180608	Sidnr	Poäng
		1	

1. Till nedanstående uppgifter skall lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm med hjälp av derivatans definition $f'(x)$ då $f(x) = 2x^2 + \dfrac{1}{x+1}$. (2p)

Lösning:

$$f(x) - f(a) = 2x^2 - 2a^2 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{a+1}$$

$$= 2(x-a)(x+a) + \frac{a-x}{(x+1)(a+1)}$$

$$= (x-a)\Big[\underbrace{2(x+a) - \frac{1}{(x+1)(a+1)}}\Big]$$

Svar: $\longrightarrow 2 \cdot 2a - \dfrac{1}{(a+1)^2} = f'(a)$

(b) Bestäm lokala max/min till funktionen $f(x) = \dfrac{12}{x+1} + x^3$. (3p)

Lösning:

$$f'(x) = -\frac{12}{(x+1)^2} + 3x^2 \qquad f'(x) = 0 \iff x = \pm\frac{2}{x+1}$$

$$\iff x^2 + x = \pm 2 \iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \pm 2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$-2 \quad -1 \quad 1 \quad x$

$+ \quad - \quad - \quad +$

$\nearrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \nearrow$

test: $-3 \to +$
$-1.5 \to -$
$0 \to -$
$2 \to +$

Svar: lok max: $x = -2$ lok min: $x = 1$

(c) Lös ekvationen $|x-4| + 5 = 6x$. (3p)

Lösning:

$x \geq 4$: $x - 4 + 5 = 6x$ $1 = 5x$ $1/5 = x$
ej lösn ty $\frac{1}{5} < 4$

$x < 4$: $4 - x + 5 = 6x$ $9 = 5x$ $9/5 = x$
lösn ty $9/5 < 4$

Svar: $x = 9/5$

Var god vänd!

(d) Ange den antiderivata till $f(x) = \frac{4}{(x+1)^3} - \frac{3}{x^2}$ som uppfyller $F(1) = 0$. (2p)

Lösning:

$$F(x) = 4\frac{(x+1)^{-2}}{-2} - 3\frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$F(1) = -\frac{1}{2} + 3 + C = 0 \qquad C = -\frac{5}{2}$$

Svar: $F(x) = -\frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{x} - \frac{5}{2}$

(e) Låt $g(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ och $f(x) = \frac{x+3}{1-x}$. Bestäm inversen till funktionen $f(g(x))$. (3p)

Lösning:

$$y = f(g(x)) = \frac{2x+1+3(x-2)}{x-2-(2x+1)} = \frac{5x-5}{-x-3}$$

$$-yx - 3y = 5x - 5 \qquad 5 - 3y = 5x + yx$$

$$x = \frac{5-3y}{5+y}$$

Svar: $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{5-3x}{5+x}$

(f) Bestäm ekvationen för tangenten till f's graf i punkten där $x = 2$ för funktionen $f(x) = (x-3)\sqrt{x-1}$. Ange också tangentens skärningspunkt med x-axeln. (3p)

Lösning:

$$f'(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x-3}{2\sqrt{x-1}} \qquad f'(2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tgt}: \quad y = -1 + \frac{1}{2}(x-2)$$

$$y = 0 \iff \frac{1}{2}(x-2) = 1 \iff x - 2 = 2 \iff x = 4$$

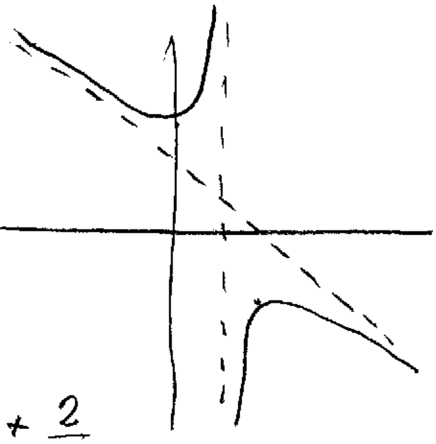
Svar: Tgt: $y = -1 + \frac{1}{2}(x-2)$ $\quad x$-pkt: $x = 4$

2 $f'(x) = -1 + \frac{4}{(2-x)^2} = 0 \iff \frac{2}{2-x} = \pm 1 \iff x = \begin{cases}0\\4\end{cases}$

0	2	4	x
−	+	+	−
↘	↗	↗	↘

x	y	
0	5	← lok min
4	−3	← lok max

$\lim_{x\to 2^\pm} y = \mp\infty$



$y-(3-x) = \frac{4}{2-x} \to 0, \; x\to\pm\infty$

3a $(x+4)^2+(y-3)^2 = 11+16+9 = 36 = 6^2$

cent: $(-4,3)$ radie: 6

3b $2x+8+2yy'-6y'=0$

$y' = -\frac{2x+8}{2y-6} = -\frac{x+4}{y-3} = -\frac{4}{\pm\sqrt{20}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

4 $\frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac32\cos\frac{3x}{2} - \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}}{2x} = \frac00 = \lim_{x\to0}\frac{-\frac94\sin\frac{3x}{2} - \frac32\cdot\left(-\frac12\right)\cdot 3(\ )^{-3/2}}{2} = \frac98$

5 $y' = C_1\cos + C_2\sin + x(-2C_1\sin + 2C_2\cos)$

$y'' = -2C_1\sin+2C_2\cos - 2C_1\sin + 2C_2\cos + x(-4C_1\cos - 4C_2\sin)$

$y''+4y = \underbrace{-4C_1}_{1}\sin + \underbrace{4C_2}_{0}\cos = \sin 2x \qquad C_1 = -\frac14 \quad C_2 = 0$

6 $x^2+6x+9 = 4-12x+9x^2 \iff 0 = -5-18x+8x^2$

$x = \frac{18\pm\sqrt{18^2-4\cdot8\cdot(-5)}}{2\cdot8} = \frac{18\pm2\sqrt{81+40}}{2\cdot8} = \frac{18\pm2\cdot11}{2\cdot8} = \frac{9\pm11}{8} = \begin{cases}5/2\\-1/4\end{cases}$

test: $\sqrt{\ } = 2-3\cdot\frac52 = -\frac{11}{2}$ nej; $\sqrt{\ } = 2-3\cdot\left(-\frac14\right) = \frac{11}{4}$ Ja $\quad \underline{\underline{-1/4}}$

7a $f'(x) = e^x - 3e^{-x} - 2e^{2x}+6 \quad f(x) = e^x+3e^{-x}-e^{2x}+6x+C$

$f(0) = 1+3-1+C = 5 \quad C=2$

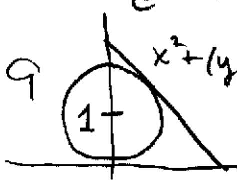
7b $e^{-x}=2 \quad x=-\ln2 \quad e^{2x}=3 \quad x=\frac12\ln3$

$-\ln 2$		$\frac12 \ln 3$	
−	+	−	
↘	↗	↘	

test: $-10 \to -$; $0 \to +$; $+10 \to -$

8a trigetta+alg: $\frac{-1+t^2}{1+t^2}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(t-2\arctan t)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(\qquad)$

8b $\frac{e^{4x}+e^{2x}}{e^{6x}+1} = \frac{(e^{2x}+1)e^{2x}}{(e^{2x})^3+1} = \frac{e^{2x}}{(e^{2x})^2-e^{2x}+1} = \frac{d}{dx}(\arctan(\quad))$

9 

$x^2+(y-1)^2=1$

$\left.\begin{array}{l}-k=y'\\ m-kx=y\end{array}\right\} \quad A = \frac12\cdot m\cdot\frac{m}{k} = \frac{m(k)^2}{k} \quad \frac{dA}{dk}=0$

10 $(e^x+e^{-x})^3 = \ldots$