Anonym kod	MVE535/MVE415 Matematisk analys, del 1 180828	Sidnr	Poäng
		1	

1. Till nedanstående uppgifter skall lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm med hjälp av derivatans definition $f'(x)$ då $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$. (2p)

Lösning:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = -\frac{h}{h(x+h)x} \to -\frac{1}{x^2}$$

Svar: $-1/x^2$

(b) Bestäm lokala max/min till funktionen $f(x) = 12x + 12x^2 - x^3$. (3p)

Lösning:

$f'(x) = 12 + 24x - 3x^2$ $\quad x = 4 \pm \sqrt{16+4}$

$4-\sqrt{20}$ $\quad 4+\sqrt{20}$

$-$ $\quad +$ $\quad -$

$f'(-2) < 0$ $\quad f'(0) > 0$ $\quad f'(10) < 0$

Svar: lok min: $x = 4-\sqrt{20}$ lok max: $x = 4+\sqrt{20}$

(c) Lös ekvationen $2|x+1| = 5 + 4x$. (3p)

Lösning:

$x \geq -1$: $\quad 2x+2 = 5+4x \quad -3 = 2x \quad x = \frac{-3}{2} \not\geq -1$

$x < -1$: $\quad -2x-2 = 5+4x \quad -7 = 6x \quad x = \frac{-7}{6} < -1$

Svar: $x = -7/6$

Var god vänd!

(d) Ange den antiderivata till $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} - \dfrac{4}{x^3}$ som uppfyller $F(1) = 0$. (2p)

Lösning:

$$x^{-3/2} - 4x^{-3} = \frac{d}{dx}\Big(\underbrace{\frac{x^{-1/2}}{-1/2} - 4\,\frac{x^{-2}}{-2} + C}_{F(x)}\Big)$$

$$F(1) = -2 + 2 \overset{+C}{=} 0 \iff C = 0$$

Svar: $-\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x^2}$

(e) Låt $g(x) = \dfrac{x+1}{x}$ och $f(x) = \dfrac{x+4}{1-3x}$. Bestäm inversen till funktionen $f(g(x))$. (3p)

Lösning:

$$f(g(x)) = \frac{\frac{x+1}{x} + 4}{1 - \frac{3(x+1)}{x}} = \frac{1+5x}{-3-2x} = y$$

$$1 + 5x = (-3-2x)y \qquad x = \frac{-1-3y}{5+2y} = f^{-1}(y)$$

Svar: $f^{-1}(x) = \dfrac{-1-3x}{5+2x}$

(f) Bestäm ekvationen för tangenten till f's graf i punkten där $x = \pi/2$ för funktionen $f(x) = (x - \pi)\cos(2x)$. Ange också tangentens skärningspunkt med x-axeln. (3p)

Lösning:

$$f'(x) = \cos 2x + (x - \pi)(-2)\sin 2x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\text{tgt}: \; y = \frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \pi - x$$

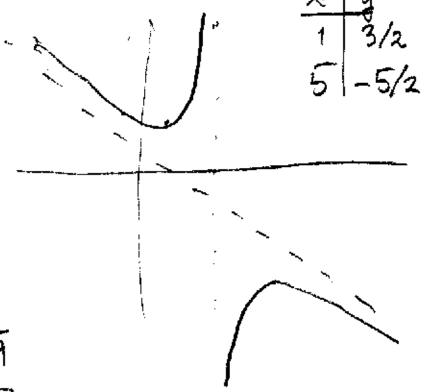
skärning x-axel : $x = \pi$

Svar: $y = \pi - x \qquad x = \pi$

2/ $f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{(3-x)^2} = \frac{4-(3-x)^2}{2(3-x)^2}$ $\quad x-3 = \pm 2$

1 3 5
– + + –

x	y
1	3/2
5	–5/2



$\lim_{x \to 3^{\pm}} f(x) = \mp\infty \qquad f(x) - (1 - \frac{x}{2}) \to 0, x \to \pm\infty$

3a/ $(x+5)^2 + (y-10)^2 = 100 + 25 + 19 = 12^2$

mp $= (-5, 10)$ $\quad r = 12$

3b/ $2x + 10 + 2yy' - 20y' = 0 \quad y' = -\frac{x+5}{y-10} = -\frac{5}{\pm\sqrt{119}}$

4/ $\frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim \frac{1/2 - 1/2 \cdot (1+x)^{-1/2}}{2x} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1/4 \cdot (1+x)^{-3/2}}{2} = \frac{1}{8}$

5/ $y' = (2Ax + B - 2(Ax^2 + Bx))e^{-2x}$

$y'' = (2A - 2B - 4Ax - 2(2Ax + B - 2Ax^2 - 2Bx))e^{-2x}$

$y'' - 4y = (2A - 2B \underbrace{-4Ax - 4Ax}_{x} - 2B)e^{-2x}$ $\quad \left.\begin{array}{l} -8A = 1 \\ 2A - 4B = 0 \end{array}\right\}$ $\quad A = -1/8 \quad B = -1/16$

6/ $x^2 + 4x + 4 = 25 + 20x + 4x^2 \quad x = (-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 21})/6 = \begin{cases} -7/3 \\ -3 \end{cases}$

7/a/ $f'(x) = 1 - 5e^{-2x} - 3e^{2x} + 15 \quad f(x) = 16x + \frac{5}{2}e^{-2x} - \frac{3}{2}e^{2x} + C$

$f(0) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = 0$

7b/ $x = \frac{\ln 3}{-2}$ eller $x = \frac{\ln 5}{2}$

– + –

$f'(-10) \approx -5e^{20} < 0$

$f'(0) = 16 > 0$

$f'(10) \approx -3e^{20} < 0$

8a/ t.ex. dubbla vinkel $\frac{\cos^2 x}{\cos 2x} = \frac{1}{2} \frac{1 + \cos 2x}{\cos 2x}$

8b/ $\frac{x^5 + x^2}{x^6 + 1} = \frac{x^5 + x^2}{(x^3)^2 + 1}$

9/ θ $\quad A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(\arctan 2k - \arctan k)$

$\frac{dA}{dk} = \ldots$

10/ a/ f växande

10b/ $x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \qquad 1 = \frac{d}{dx}(\quad) = \frac{d}{dy}(\quad) \cdot \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\quad)} = (1 - x^2)^{-1}$