Dugga i MVE415b
6/5 2015 10.00-12.00
Matematiska Vetenskaper, Chalmers
Elin Götmark, 0706787423
Skriv lösning till alla uppgifter (om det inte står att det räcker med svar). Lösningar skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Allt ska skrivas på duggalappen; lämna inte in några andra papper. Inga hjälpmedel är tillåtna.

Namn: ....

Födelsedatum: ....

1. Beräkna $\int xe^{-2x}\,dx$. (1p)
Lösning:

$$\int xe^{-2x}\,dx = \{\text{partiell integration}\} = x\cdot\frac{e^{-2x}}{-2} - \int 1\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(xe^{-2x} - \int e^{-2x}\,dx\right) = -\frac{1}{2}\left(xe^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{2}\right) + C =$$

$$= \underline{-\frac{e^{-2x}}{4}(2x+1) + C}$$

2. Beräkna $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{\sin(x)}$. (1p)
Lösning:

$f(x) = \frac{x^2}{\sin(x)}$ är en udda funktion, eftersom $f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sin(-x)} = -\frac{x^2}{\sin(x)} = -f(x)$, och $[-\pi, \pi]$ är ett intervall som är symmetriskt kring noll. Alltså är integralen noll.

3. Hitta en primitiv funktion till $\frac{x^2+1}{x^2-x}$. (2p)
Lösning:

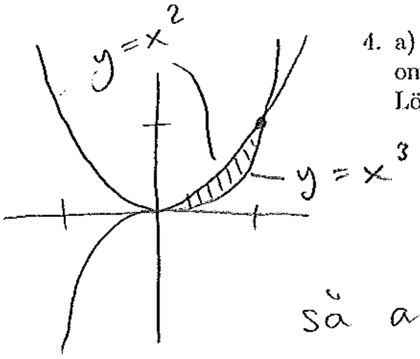
Vi börjar med polynomdivision: $\frac{x^2+1}{x^2-x} = \frac{x^2-x+x+1}{x^2-x} = 1 + \frac{x+1}{x^2-x}$

Sedan partialbråksuppdelar vi: $\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} =$

$$= \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x - A}{x(x-1)}$$

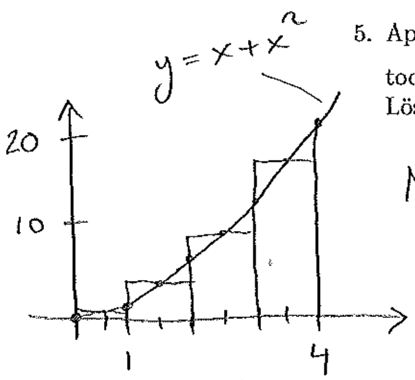
$x+1 = (A+B)x - A$ ger $\begin{cases} A+B=1 \\ -A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$.

Så $\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx = \int 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}\,dx = \underline{x - \ln|x| + 2\ln|x-1| + C}$



4. a) Beräkna arean som begränsas av $y = x^2$ och $y = x^3$. Rita en bild över området. (1,5p)

Lösning: Skärningspunkterna ges $x^2 = x^3 \iff x^2 - x^3 = 0 \iff x^2(1-x) = 0 \iff x = 0$ och $x = 1$. $x^2 \geq x^3$ när $0 \leq x \leq 1$, så arean ges av $\int_0^1 x^2 - x^3\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{12}\text{ a.e.}}}$



5. Approximera integralen $\int_0^4 x + x^2\,dx$ genom att använda mittpunktsmetoden med fyra delintervall. (1,5p)

Lösning: Intervall-längden är $\Delta x = 1$.

$M_4 = \Delta x\left(f(\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{3}{2}) + f(\tfrac{5}{2}) + f(\tfrac{7}{2})\right) =$

$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 =$

$= \frac{16}{2} + \frac{1+9+25+49}{4} = 8 + \frac{84}{4} = 8 + 21 = \underline{\underline{29\text{ a.e}}}$

6. Är det sant att om $f(x) \to \infty$ när $x \to 0^+$, så är $\int_0^1 f(x)\,dx$ divergent? Motivera påståendet om det är sant, och hitta ett motexempel om det är falskt. (1p)

Lösning:

Påståendet är falskt. Ett motexempel är $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, som $\to \infty$ när $x \to 0^+$, men $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent (eftersom $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2\cdot\sqrt{1} - \underbrace{\lim_{t\to 0^+} 2\sqrt{t}}_{=0} = 2 - 0 = 2$).