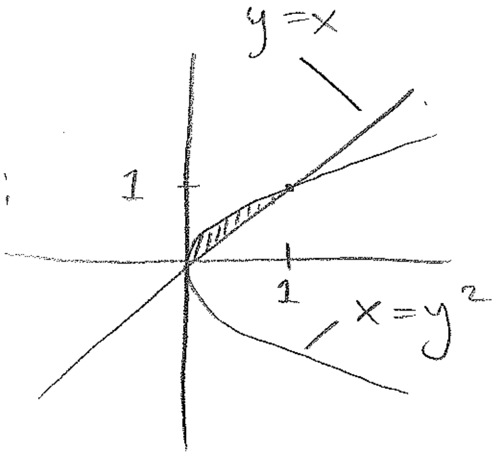
Lösningar tenta MVE415b

4/6 2015 Elin Götmark

(1.) Se separat blad på slutet.

(2.) Vi ritar upp funktionerna:



Vi hittar skärningspunkterna:

$y = y^2 \iff y^2 - y = 0 \iff$

$y(y-1) = 0 \iff y = 0$ och $y = 1$.

Eftersom $y = x$ svarar detta mot $x=0$ och $x=1$.

$x = y^2 \iff y = \pm\sqrt{x}$. Funktionen $y = \sqrt{x}$

ligger ovanför $y = x$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$.

Då blir arean: $\int_0^1 \sqrt{x} - x \, dx =$

$= \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3/2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} =$

$= \frac{4-3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$ a.e

(3.) Graden i täljaren är lägre än graden i nämnaren, så vi kan göra partialbråksuppdelning direkt.

$$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(C-B)x+(A-C)}{(x-1)(x^2+1)}$$

Alltså är
$$\begin{cases} A+B=1 \\ C-B=-2 \\ A-C=-1 \end{cases}$$

Första ekvationen ger $A=1-B$, och insättning i ekv. 2 och 3 ger

$$\begin{cases} C-B=-2 \\ 1-B-C=-1 \end{cases}$$ dvs $$\begin{matrix} C-B=-2 \\ -C-B=-2 \end{matrix}$$

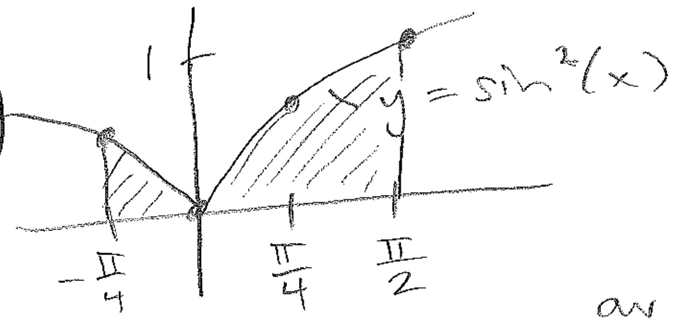
Addition av ekvationerna ger $-2B=-4$ dvs $\underline{B=2}$. Då är $C=-2+B=0$

och $A=1-B=-1$

Så $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \int -\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{x^2+1}\,dx =$

$$= \underline{-\ln|x-1| + \ln(x^2+1) + C}$$

4.



Approximation med trapetsmetoden med tre delintervall ges av $T_3 = \frac{\Delta x}{2}\Big(f(x_0)+$

$+2f(x_1)+2f(x_2)+f(x_3)\Big) = \frac{\pi/4}{2}\Big(\sin^2\!\left(-\frac{\pi}{4}\right)+$

$+2\sin^2(0)+2\sin^2\!\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\!\left(\frac{\pi}{2}\right)\Big) =$

$$= \frac{\pi}{8}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\cdot 0^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+1\right) = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{5}{2} = \underline{\frac{5\pi}{16}}\text{ a.e.}$$

(5.) Vi tar först fram den homogena lösningen: den karakteristiska ekv. är $r^2 - 1 = 0$, dvs $r = \pm 1$. Då är

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Eftersom högerledet är ett polynom av grad 1 ansätter vi $y_p = Ax + B$.

$y_p' = A$, $y_p'' = 0$.

Insättning i ekvationen ger:

$$y_p'' - y_p = 0 - Ax - B = x.$$

Då är $A = -1$, $B = 0$, och $y_p = -x$.

Så $y = y_h + y_p = \underline{C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x}$.

$y(0) = 0$ ger: $C_1 + C_2 = 0$, dvs $C_2 = -C_1$

$y'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - 1$

$y'(0) = C_1 - C_2 - 1 = 2$ Sätt in $C_2 = -C_1$:

$C_1 + C_1 = 3$ $C_1 = \frac{3}{2}$

Så $y = \underline{\frac{3}{2}(e^x - e^{-x}) - x}$

(6.) $a(t) = v'(t)$, så vi har

$$v' = A - kv^2 \quad \text{där } k > 0.$$

konstant acc. framåt — deceleration som är proportionell mot v^2.

(7.) Se boken sid. 391.

(8.) Vi kan inte hitta en primitiv funktion till $\frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}$, så vi måste göra en uppskattning. Vi vet att $\int_1^\infty \frac{1}{e^x}\,dx$ är konvergent, eftersom $\int_1^\infty \frac{1}{e^x}\,dx = \int_1^\infty e^{-x}\,dx =$

$$= -\left[e^{-x}\right]_1^\infty = -\underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{-t}}_{=0} + e^{1} = e.$$

Så en rimlig hypotes är att $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx$ också är det.

Eftersom $\sqrt{x} \geq 1$ när $x \geq 1$, så är $\frac{1}{\sqrt{x}\,e^x} \leq \frac{1}{e^x}$. Då är $0 \leq \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx \leq \int_1^\infty e^x\,dx = e$.

Så $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,e^x}\,dx$ är instängd mellan 0 och e och måste allbå vara konvergent.

(9.) Vi tittar på rötterna till polynomet: $x = -1 \pm \sqrt{1-3}$. Eftersom det inte finns några reella rötter kan vi inte partialbråksuppdela. Istället försöker vi få täljaren att likna x^2+1.

Vi kvadratkompletterar: $x^2+2x+3 =$

$$= (x+1)^2 - 1 + 3 = (x+1)^2 + 2.$$

Så $$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t = x+1 \\ x = t-1 \\ dx = dt \end{array}\right\} =$$

$$= \int \frac{1}{t^2+2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dt = \left\{\begin{array}{l} u = \frac{t}{\sqrt{2}} \\ t = \sqrt{2}u \quad du = \frac{dt}{\sqrt{2}} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(u) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C}}$$

10. Se boken s. 388.

Anonym kod	MVE415b Matematisk Analys xxx	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna integralen $\int_{-1}^{1} x\cos(x^4)\,dx$. (2p)

Lösning:

Funktionen $f(x) = x\cos(x^4)$ är udda, eftersom $f(-x) = -x\cos((-x)^4) = -x\cos(x^4) = -f(x)$, och intervallet är symmetriskt kring noll. Så integralen är noll.

Svar: 0 2

(b) Lös differentialekvationen $y' - 2xy^2 = 0$. ~~(3p)~~

Lösning:

$\frac{dy}{dx} = 2xy^2 \iff \frac{dy}{y^2} = 2x\,dx \iff \int \frac{dy}{y^2} = \int 2x\,dx$

$\iff -\frac{1}{y} = x^2 + C \iff \underline{y = -\frac{1}{x^2+C}}$

(Förutom detta är $y=0$ också en lösning.)

Svar: $y = -\frac{1}{x^2+C}$ 3

(c) Beräkna integralen ~~(2p)~~

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2(x)\,dx.$$

Lösning: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$

Lös ut $\cos^2(x)$: $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$.

Så $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}(\cos(2x)+1)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2x)}{2} + x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$

$= \frac{1}{2}\left(0 + \pi - \left(0 + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$

Svar: $\pi/4$ ....

Var god vänd!

(d) Beräkna integralen (2p)

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

om den är konvergent.

Lösning: Nämnaren är noll när $x=-1$, alltså är integralen generaliserad där.

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[2\sqrt{x+1}\right]_{-1}^{0} = 2\cdot\sqrt{0+1} - \underbrace{\lim_{t\to -1^+} 2\sqrt{t+1}}_{=0} = 2$$

Svar: 2

(e) Beräkna integralen (2p)

$$\int 2x\cos(2x)\,dx.$$

Lösning:

$$2\int x\cos(2x)\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{partiell}\\ \text{integration}\end{matrix}\right\} = 2x\,\frac{\sin(2x)}{2} - 2\int 1\cdot\frac{\sin(2x)}{2}\,dx =$$

$$= x\sin(2x) + \frac{\cos(2x)}{2} + C$$

Svar: $x\sin(2x) + \frac{\cos(2x)}{2} + C$

(f) Lös differentialekvationen (3p)

$$y' = 2y + \cancel{2x}\,2 \qquad \cancel{y(0)=1}$$

Lösning:

$y' = 2y + 2 \iff y' - 2y = 2$ Vi räknar ut integrerande faktor: primitiv funktion till -2 är $-2x$, så int. faktor är e^{-2x}. Ekvationen blir: $\underbrace{e^{-2x}y' - 2e^{-x}y}_{=(e^{-2x}y)'} = 2e^{-2x}$

Svar: $y = -1 + Ce^{2x}$

forts: Så $e^{-2x}y = \int 2e^{-2x}\,dx = -e^{-2x} + C$

$\iff y = -1 + Ce^{2x}.$