Lösningar till övningsdugga, MVE415b
Elin Götmark 2015

(1.) $\int x\sin(x^2)\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{variabelbyte:} \\ t=x^2 \quad dt=2x\,dx\end{array}\right\} =$

$= \frac{1}{2}\int \sin(x^2)\cdot \underbrace{2x\,dx}_{dt} = \frac{1}{2}\int \sin(t)\,dt =$

$= -\cos(t)+C = \underline{\underline{-\cos(x^2)+C}}$

(2.) (a.) $\dfrac{x^2+4}{x(x+4)^2(x^2+1)} =$

$= \underline{\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+4} + \dfrac{C}{(x+4)^2} + \dfrac{Dx+E}{x^2+1}}$

(b.) $\dfrac{1-2x^2}{x^3+x} = \dfrac{1-2x^2}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} =$

$= \dfrac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$

Vi sätt nämnarna lika:

$1-2x^2 = A(x^2+1)+(Bx+C)x = \underbrace{(A+B)}_{=-2}x^2 + \underbrace{C}_{=0}x + \underbrace{A}_{=1}$

$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ C=0 \\ A+B=-2 \end{cases} \qquad B=-2-A=-3$

Så $\displaystyle\int \frac{1-2x^2}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{3x}{x^2+1}\,dx =$

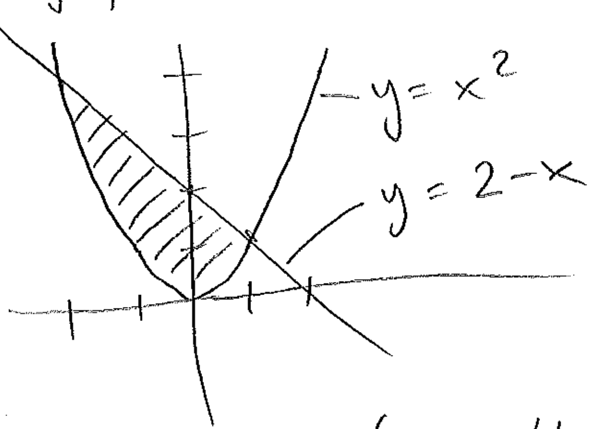
$= \ln|x| - \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \underline{\underline{\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x^2+1| + C}}$

3. a. Vi hittar skärningspunkterna:

$$x^2 = 2-x \iff x^2+x-2=0$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -2$$



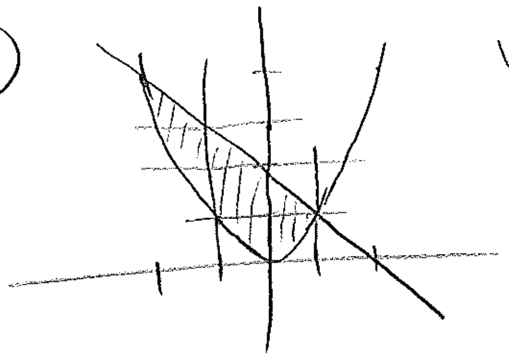
Arean blir då

$$\int_{-2}^{1} (2-x) - x^2 \, dx =$$

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{1} = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(-4 - \frac{4}{2} - \frac{-8}{3} \right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} = 8 - \frac{1}{2} - \frac{9}{3} = 5 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{4,5}}$$

b.



Varje ruta är en areaenhet. Räkning av antal rutor ger att de är ungefär 4,5.

4. $$\int_{1}^{2} \frac{1}{(x-2)^2} \, dx = \left[-\frac{1}{x-2} \right]_{1}^{2} =$$

$$= \underbrace{\lim_{t \to 2^-} \left(-\frac{1}{x-2} \right)}_{= \infty} + \underbrace{\frac{1}{1-2}}_{= -1}$$

Gränsvärdet existerar inte, alltså är integralen divergent.

5. Påståendet är falskt. Till exempel är $\int_{-1}^{2} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \geq 0$, men $f(x) = x \leq 0$ på $[-1, 0]$.