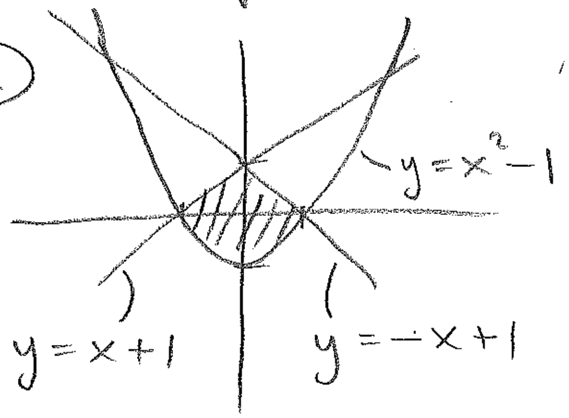
Lösningar övningstenta MVE415b

Edin Görmark

① Se separat blad som ligger sist.

② 

Vi ser att skärnings-punkten mellan x^2-1 och $x+1$ är $x=-1$, och skärningspunkten mellan x^2-1 och $-x+1$ är $x=1$. Arean blir då $\int_{-1}^{0} x+1-(x^2-1)\,dx +$

$+\int_{0}^{1} -x+1-(x^2-1)\,dx$ eller $2\int_{-1}^{0} x+1-(x^2-1)\,dx$

(pga symmetri).

$$2\int_{-1}^{0} x+1-(x^2-1)\,dx = 2\int_{-1}^{0} x+2-x^2\,dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = -2\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right) =$$

$$= -1+4-\frac{2}{3} = 3-\frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{7}{3}}} \text{ a.e.}$$

③ Vi börjar med att faktorisera nämnaren: $x^5+2x^3+x = x(x^4+2x^2+1) =$

$= x(x^2+1)^2$ (kvadreringsregeln baklänges).

Då ansätter vi:

$$\frac{2x^3-5x+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

4. Det är en linjär diff. ekv. av första ordningen, så vi använder metoden med integrerande faktor. Primitiv funktion till

$\frac{2x}{x^2+1}$ är $\ln(x^2+1)$, så integrerande faktor är $e^{\ln(x^2+1)} = x^2+1$.

$$\underbrace{(x^2+1)y' + 2xy}_{=((x^2+1)y)'} = x^2+1$$

Integrera bägge sidor:

$$(x^2+1)y = \int x^2+1\,dx = \frac{x^3}{3} + x + C$$

$$y = \frac{x^3/3 + x + C}{x^2+1}$$

5. Karakteristisk ekv. är $r^2+2r+2=0$

$$r = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$$

Så den allmänna lösningen är

$$y = e^{-x}(A\cos(x) + B\sin(x))$$

Vi bestämmer A och B m.h.a. begynnelse-villkoren:

$$y' = e^{-x}(-A\sin(x) + B\cos(x)) - e^{-x}(A\cos(x) + B\sin(x)) =$$

$$= e^{-x}(-(A+B)\sin(x) + (B-A)\cos(x))$$

$y(0)=3$ ger $e^0(A\cdot 1 + B\cdot 0) = 3$, dvs $A=3$

$y'(0)=5$ ger $e^0(-(A+B)\cdot 0 + (B-A)\cdot 1) = 5$,

dvs $B-A=5 \Leftrightarrow B = 5+3 = 8$,

så $\underline{y = e^{-x}(3\cos(x) + 8\sin(x))}$

6. Sätt $y(t)$ = antalet personer som känner till informationen vid tiden t.

Sätt M = populationens storlek.

Då är antalet som inte känner till informationen $= M - y(t)$.

Så $\underline{\underline{y' = ky(M-y)}}$

7. Se boken sid. 412.

<u>Överbetygsdelen:</u> (sorry, konstig numrering)

6. Både $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ och $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ är konvergenta, så vi gissar att $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}+x^{1/3}}\,dx$ också är det. För att visa detta måste vi uppskatta $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}+x^{1/3}}\,dx$ uppåt med en konvergent integral. (Vi klarar ju inte av att hitta en primitiv funktion till $\frac{1}{x^{1/2}+x^{1/3}}$.)

Eftersom $x^{1/2}+x^{1/3} \geq x^{1/2}$ på $[0,1]$ så gäller $0 \leq \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}+x^{1/3}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx =$

$= \left[2x^{1/2}\right]_0^1 = 2 - \underbrace{\lim_{t\to 0^+} 2x^{1/2}}_{=0} = 2$, så

$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}+x^{1/3}}\,dx$ är instängd mellan 0 och 2 och måste alltså vara konvergent.

7. $y'' + 3y' + 2y = x + xe^x$

Vi hittar först en partikulärlösning som löser $VL = x$: sätt $y_{p_1} = Ax + B$. Vi sätter in det i ekv.: $y'_{p_1} = A$, $y''_{p_1} = 0$.

$$VL = 0 + 3 \cdot A + 2 \cdot (Ax + B) = \underbrace{2A}_{=1}x + \underbrace{3A + 2B}_{=0} = x$$

Då är $A = \frac{1}{2}$ och $3 \cdot \frac{1}{2} + 2B = 0$, dvs $B = -\frac{3}{4}$

Så $y_{p_1} = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$.

Sedan hittar vi en partikulärlösning som löser $VL = xe^x$. Vi provar med $y_{p_2} = (Ax + B)e^x$. Sätt in i ekv:

$$y'_{p_2} = (Ax + B)e^x + A \cdot e^x = (Ax + B + A)e^x$$

$$y''_{p_2} = (Ax + B + A)e^x + A \cdot e^x = (Ax + B + 2A)e^x$$

$$VL = (Ax + B + 2A)e^x + 3(Ax + B + A)e^x + 2(Ax + B)e^x =$$

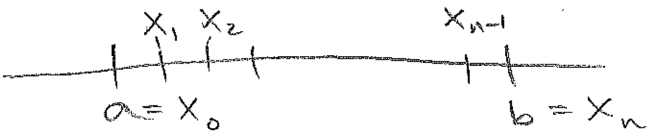
$$(\underbrace{6A}_{=1}x + \underbrace{6B + 5A}_{=0})e^x = xe^x$$

Så $A = \frac{1}{6}$, och $6B = -\frac{5}{6}$, dvs $B = -\frac{5}{36}$

Totalt: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \underline{\underline{\frac{x}{2} - \frac{3}{4} + \left(\frac{x}{6} - \frac{5}{36}\right)e^x}}$

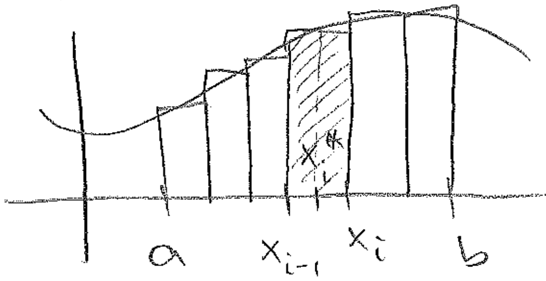
8. Vi vill förklara vad som menas med en bestämd integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Sätt $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, och $x_i = a + i \cdot \Delta x$.



Välj en punkt x_i^* i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$.

Vi vill summera alla rektanglar med höjd $f(x_i^*)$ och bas Δx; tanken är att det ska bli en bra approximation av grafen under $f(x)$ mellan a och b.



Summan är $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$.

Nu definierar vi $\int_a^b f(x)\,dx$ till att vara

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

(om gränsvärdet existerar).

Anonym kod	MVE415b Matematisk Analys xxx	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Hitta en primitiv funktion till $f(x) = e^x \cos(e^x)$. (2p)

Lösning:

$$\int e^x \cos(e^x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right\} = \int \cos(t)\,dt =$$

$$= \sin(t) + C = \underline{\underline{\sin(e^x) + C}}$$

Svar: ....

(b) Är $y(t) = t^2 + t^3$ en lösning till differentialekvationen $t^2y'' - 4ty' + 6y = 0$? (2p)

Lösning:

Vi testar genom insättning. $y' = 2t + 3t^2$ $y'' = 2 + 6t$

$$t^2y'' - 4ty' + 6y = t^2(2+6t) - 4t(2t+3t^2) + 6(t^2+t^3) =$$

$$= 2t^2 + 6t^3 - 8t^2 - 12t^3 + 6t^2 + 6t^3 = 0$$

Svar: ....Ja..

(c) Beräkna (3p)

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^2(x)\,dx.$$

Lösning:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^2(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos(x) \quad dt = -\sin(x)\,dx \\ x = 0 \Leftrightarrow t = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= -\int_1^0 t^2\,dt = \left[-t^3/3\right]_1^0 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Svar: ....

Var god vänd!

(d) Beräkna integralen (3p)

$$\int \sqrt{x}\ln(x)dx.$$

Lösning:

$$\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{partial-}\\ \text{integr.}\end{matrix}\right\} = \frac{x^{3/2}}{3/2}\cdot\ln(x) - \int \frac{x^{3/2}}{3/2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{2}{3}\int x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}\left(x^{3/2}\ln(x) - \frac{x^{3/2}}{3/2}\right) + C =$$

$$= \underline{\frac{2x^{3/2}}{3}\left(\ln(x) - \frac{2}{3}\right) + C}$$

Svar: ....

(e) Beräkna integralen (2p)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

om den är konvergent.

Lösning:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan(x)\right]_0^\infty = \lim_{t\to\infty} \arctan(t) - \arctan(0) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

Integralen är alltså konvergent.

Svar: ....

(f) Lös differentialekvationen (2p)

$$y' = x^2y^3.$$

Lösning:

$$\frac{dy}{dx} = x^2y^3 \iff \frac{dy}{y^3} = x^2dx \iff \int\frac{dy}{y^3} = \int x^2dx$$

$$\iff -\frac{1}{2y^2} = x^3 + C \iff \underline{y^2 = -\frac{1}{2x^3+C}}$$

eller $\underline{y = \pm\frac{1}{\sqrt{-2x^3+C}}}$.

Svar: ....