Lösningar till Matematisk Analys, del 2, (MVE545) 2018-06-22

1. **a)** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+(x/2)^2}}\,dx = \left[t = \frac{x}{2}\right] = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} 2\,dt = \left[\ln|t+\sqrt{1+t^2}|\right]_0^{1/2} = \ln|\frac{1+\sqrt{5}}{2}|$,
b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{3}x)^2}}\,dx = \left[t = \sqrt{3}x\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}}(\arcsin t + C) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(\sqrt{3}x) + C$, **c)** $y' + (-\frac{1}{x})y = x$, linjär. IF: $e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}y) = \frac{1}{x}x = 1 \Rightarrow \frac{1}{x}y = \int \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}y)\,dx = \int 1\,dx = x + C \;\Rightarrow\; y = x^2 + Cx$, **d)** $\int \cos^2 x \sin x\,dx = \left[\text{inre derivata, } t = \cos x,\ \frac{dt}{dx} = -\sin x\right] = \int t^2(-dt) = -\int t^2\,dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$,
e) $\int x\cos x\,dx = \left[\text{PI}\right] = x\sin x - \int 1\cdot \sin x\,dx = x\sin x - (-\cos x) + C = x\sin x + \cos x + C$, **f)** $y'' - 3y' + 2y = 0$ är linjär med konstanta koefficienter så $y = y_p + y_h$ med karakteristisk ekvation: $0 = r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$. Då får vi att $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$. För y_p ansätter vi $y_p = x^m(ax+b) = \left[\text{m=0}\right] = ax + b,\ y_p' = a,\ y_p'' = 0 \therefore x + 1 = y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 0 - 3a + 2(ax+b) \Rightarrow 2a = 1,\ -3a + 2b = 0 \Rightarrow a = 1/2,\ b = 3/4 \ \therefore y = y_p + y_h = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + C_1e^x + C_2e^{2x}$.

2. $y = x^2 + x\ln x,\ y' = 2x + \ln x + 1,\ y'' = 2 + (1/x)$ Insättning ger att y löser ekvationen i a) och c) men ej b).

3. a) $\int \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \left[\text{t=2x}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\arctan(2x) + C$, b) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \left[\text{'Listan'}\right] = \tan x + C$,
c) $\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\text{inre derivata, } t = x^2+1,\ \frac{dt}{dx} = 2x,\ 0 \to 1,\ 2\sqrt{2} \to 9\right] = \frac{1}{2}\int_1^9 \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}(\ln 9 - \ln 1) = \ln 3$,
d) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \left[t = \sqrt{x}\right] = 2\int te^t\,dt = \left[\text{PI}\right] = 2(te^t - \int 1\cdot e^t\,dt) = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$ e) Bootstrapping": $I \equiv \int e^x \sin x\,dx = \left[\text{PI}\right] = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = \left[\text{PI}\right] = e^x\sin x - (e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx) = e^x(\sin x - \cos x) - I \therefore 2I = (\sin x - \cos x)e^x + C \Rightarrow \int e^x\sin x\,dx = I = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + C$

4. a) $y' + y = x$, linjär, IF: $e^{\int 1\,dx} = e^x \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^xy) = xe^x \Rightarrow e^xy = \int \frac{d}{dx}(e^xy)\,dx = \int xe^x\,dx = \left[\text{PI}\right] = xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx = (x-1)e^x + C \Rightarrow y = x - 1 + Ce^{-x}$, b) $y' = y^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2+1}y' = 1$, separabel $\Rightarrow \arctan y = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int 1\,dx = x + C \Rightarrow y = \tan(x+C),\ C \in \mathbb{R}$.

5. Den aktuella arean är arean av det delområde i $\mathbb{R}^2$ som ligger i första kvadranten under linjen $y = 2x+1$ och ovanför grafen till den kvadratiska kurvan $y = x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = (x - \frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16} + 1 = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{16}$. Graferna skär varandra i punkterna $(0,1)$ och $(9/2, 10)$. Kurvan ligger i första kvadranten under den räta linjen då $0 \le x \le 9/2$ och kurvan skär x-axeln i punkterna $(1/2, 0)$ och $(2, 0)$. Arean A ges alltså som $A = \int_0^{1/2} 2x + 1 - (x^2 - \frac{5}{2}x + 1)\,dx + \int_{1/2}^2 2x + 1\,dx + \int_2^{9/2} 2x + 1 - (x^2 - \frac{5}{2}x + 1)\,dx$ och detta blir om man räknar ut det (vilket man alltså inte behöver göra) cirka 20.

6. a) och b) har lösning $y = y_p + y_h$ där $y_h = C_1e^{-2x} + C_2e^{-5x}$. För a), ansätt $y_p = Ce^x \Rightarrow \ldots \Rightarrow y_p = \frac{1}{18}e^x$. För b), ansätt $y_p = Ce^{3x} \Rightarrow \ldots \Rightarrow y_p = \frac{1}{40}e^{3x}$. Lämpligen väljer man väl att lösa a) som ju är något lite enklare att lösa. För c), se kurslitteraturen.

Överbetygsdelen

---

7. Kirchoffs spänningslag ger $V = RI + L\frac{dI}{dt}$. Vi ser ju att om en jämviktsström uppnås så är denna ström I ju konstant och därför uppfyller $\frac{dI}{dt} = 0$ och därmed gäller $V = RI + 0$ så jämviktsströmmen är alltså I=V/R.

Vi löser nu problemet genom att lösa en ODE. Vi har att ODE:n ger $I' + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L}$ som är linjär med integrerande faktor IF: $e^{\int \frac{R}{L}\,dt} = e^{\frac{R}{L}t} \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{\frac{R}{L}t}I) = \frac{V}{L}e^{\frac{R}{L}t} \Rightarrow e^{\frac{R}{L}t}I = \int \frac{d}{dt}(e^{\frac{R}{L}t}I)\,dt = \int \frac{V}{L}e^{\frac{R}{L}t}\,dt = \frac{V}{L}\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C \Rightarrow I(t) = \frac{V}{R}(1 + Ce^{-\frac{R}{L}t}) \to \frac{V}{R}$ då $t \to \infty$; d v s jämviktsströmmen är, som vi ju såg ovan också, just $\frac{V}{R}$.

8. $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \left[\text{PBU}\right] = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C = \ln\frac{|x-2|}{|x-1|} + C = \ln|\frac{x-2}{x-1}| + C$.

9. $y' = y(1-y)$ Vi ser att y=0 och y=1 är potentiellt singulära lösningar. Om $y \neq 0$ och $y \neq 1$ så gäller att $y' = y(1-y) \Rightarrow \dfrac{1}{y(1-y)}\dfrac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{y(1-y)}dy = 1dx \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{y(1-y)}dy = \int 1dx \Rightarrow$ för godtycklig konstant C_1 gäller $x + C_1 = \displaystyle\int \frac{1}{y(1-y)}\,dy = \Big[\text{PBU}\Big] = \int \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\,dy = \ln|y| - \ln|1-y|$ plus ngn konstant som vi bakar in i $C_1 \therefore \ln|\dfrac{y}{1-y}| = x + C_1 \Rightarrow |\dfrac{y}{1-y}| = e^{x+C_1} = e^{C_1}e^x = C_2e^x$ där $C_2 > 0$ som ger $\dfrac{y}{1-y} = \pm C_2e^x = Ce^x$ där $C \neq 0 \therefore y = Ce^x(1-y) \Rightarrow y = \dfrac{Ce^x}{1+Ce^x}$, $C \neq 0$. Vi får då genom att tilllåta även $C = 0$ (som ger lösningen y=0) att lösningarna ges som $y = \dfrac{Ce^x}{1+Ce^x}$, $C \in \mathbb{R}$, allmän lösning, och $y = 1$ (som inte finns med i den allmänna lösningen för ngt val av konstant C) som är singulär lösning.

10. $y'' + 2y' + 2y = x\sin x$, linjär $\Rightarrow y = y_p + y_h$. För y_h: karakteristiska ekvationen $0 = r^2 + 2r + 2 = (r+1)^2 + 1 \Rightarrow r_{1,2} = -1 \pm i \Rightarrow y_h = K_1e^{(-1-i)x} + K_2e^{(-1+i)x} = \Big[\text{reell form}\Big] = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. För y_p: Ansätt $y_p = (Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x \Rightarrow y_p' = A\sin x + (Ax+B)\cos x + C\cos x - (Cx+D)\sin x,\ y'' = A\cos x + A\cos x - (Ax+B)\sin x - C\sin x - C\sin x - (Cx+D)\cos x = (2A - D - Cx)\cos x - (Ax + B + 2C)\sin x$. Insättning i ekvationen ger $x\sin x = y_p'' + 2y_p' + 2y_p = (2A - D - Cx + 2(Ax + B + C) + 2(Cx + D))\cos x + (-(Ax + B + 2C) + 2(A - (Cx + D)) + 2(Ax + B))\sin x$

$$\therefore \begin{cases} 2A + C & = & 0 \\ 2A + 2B + 2C + D & = & 0 \\ A - 2C & = & 1 \\ 2A + B - 2C - 2D & = & 0 \end{cases} \Rightarrow A = 1/5,\ B = -2/25,\ C = -2/5,\ D = 14/25.$$

$$\therefore y = (\frac{x}{5} - \frac{2}{25})\sin x + (-\frac{2}{5}x + \frac{14}{25})\cos x + e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x),\ C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2.$$