Lösningar MVE415b 18/8 2015

Elin Götmark

1. Se separat papper sist.

2. Vi räknar ut skärningspunkter:

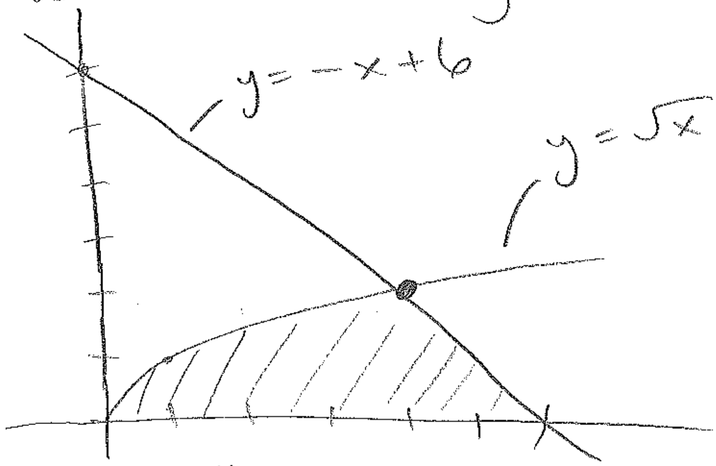
$$\sqrt{x} = -x+6 \iff x = (-x+6)^2 = x^2 - 12x + 36$$

$\iff x^2 - 13x + 36$. Lösningarna blir

$$x = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169-144}{4}} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} =$$

$$= \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2}, \quad \text{alltså } x = 9 \text{ och } x = 4.$$

Vi måste testa lösningarna i den ursprungliga ekvationen: $\sqrt{9} = 3$ och $-9+6 = -3$, så $x=9$ är inte en lösning. $\sqrt{4} = 2$ och $-4+6 = 2$, så $x = 4$ är en lösning. Vi ritar upp området:



Arean blir $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,dx + \int_4^6 -x+6\,dx =$

$$= \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 + \left[-\frac{x^2}{2} + 6x\right]_4^6 = \frac{2}{3}\cdot 4 \cdot \sqrt{4} - 0$$

$$- \frac{36}{2} + 36 - \left(-\frac{16}{2} + 24\right) = \frac{16}{3} + 18 + 8 - 24 =$$

$$= \frac{16}{3} + 2 = \underline{\underline{\frac{22}{3}}} \text{ a.e.}$$

(3.) Vi måste dela upp integralen i två eftersom den är generaliserad på två ställen:

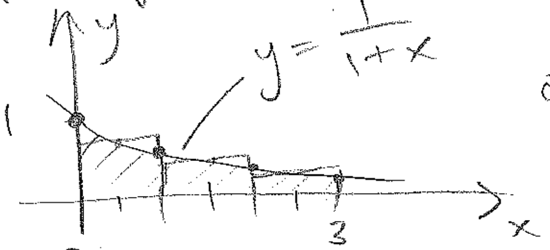
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{0}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1) - \underbrace{\lim_{t\to-\infty} \frac{1}{2}\ln(1+t^2)}_{=\infty} + \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\ln(1+t^2)}_{=\infty} - \frac{1}{2}\ln(1)$$

Gränsvärdena existerar inte, så båda delintegralerna är divergenta. Alltså är den ursprungliga integralen också divergent.

(4.)



$$\int_0^3 \frac{1}{1+x}\,dx =$$

$$= \Delta x \left(f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f\left(\tfrac{3}{2}\right) + f\left(\tfrac{5}{2}\right) \right) =$$

$$\Delta x = \frac{3-0}{3} = 1$$

$$= 1 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{3}{2}} + \frac{1}{1+\frac{5}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{3/2} + \frac{1}{5/2} + \frac{1}{7/2} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} =$$

$$= \frac{2\cdot5\cdot7 + 2\cdot3\cdot7 + 2\cdot3\cdot5}{3\cdot5\cdot7} = \frac{70+42+30}{105} =$$

$$= \frac{142}{105}$$

(5.) Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \iff r = -1 \pm \sqrt{1-5} =$$

$$= -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i$$

så den allmänna lösningen är

$$y = e^{-x}\left(A\cos(2x) + B\sin(2x)\right).$$

$$y(0) = 1 \implies A \cdot 1 + B \cdot 0 = 1, \text{ så } \underline{A = 1}.$$

$$y' = e^{-x}\left(-2\sin(2x) + 2B\cos(2x)\right) - e^{-x}\left(\cos(2x) + B\sin(2x)\right)$$

så $y'(0) = -1 \implies 2B \cdot 1 - 1 = -1 \implies 2B = 2$

$\implies \underline{B = 1}.$

Lösningen är alltså $\underline{y = e^{-x}\left(\cos(2x) + \sin(2x)\right)}$

(6.) Sätt $y(t)$ = vattenhöjden vid tiden t.

Då är $y'(t) = k \cdot \sqrt{y(t)}$ med $k < 0$.

Begynnelsevillkoret är $y(0) = 2$ m.

(7.) Se boken sid. 464

(8.)
$$\int_0^{3/\sqrt{2}} \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \left\{\begin{array}{ll} x = 3\sin(t) & x = 0 \iff t = 0 \\ dx = 3\cos(t)\,dt & x = \frac{3}{\sqrt{2}} \iff \\ 3\sin(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} \iff \sin(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff t = \frac{\pi}{4} & \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9 - 9\sin^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t) & \text{på intervallet } [0, \frac{\pi}{4}] \end{array}\right\}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{27\sin^3(t) \cdot 3\cancel{\cos(t)}}{\cancel{\cos(t)}}\,dt = 81\int_0^{\pi/4} \sin(t)\left(1 - \cos^2(t)\right)dt =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} u = \cos(t) & t = 0 \iff u = 1 \\ du = -\sin(t)\,dt & t = \frac{\pi}{4} \iff u = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} = -\int_1^{1/\sqrt{2}} (1 - u^2)\,du =$$

$$= \int_{1/\sqrt{2}}^1 (1-u^2)\,du = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{1/\sqrt{2}}^1 = 1 - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{6} - 1\right) = \underline{\frac{2}{3} - \frac{5}{\sqrt{2}\,6}}$$

9. Den karakteristiska ekvationen är:

$r^2 - 4r + 4 = 0 \implies r = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$,

så vi har en dubbelrot. Den homogena lösningen är $y = (C_1 x + C_2)e^{2x}$.

Så högerledet e^{2x} förekommer i den homogena lösningen; vi ansätter alltså

$y_p = Ax^2 e^{2x}$. Då är $y_p' = Ax^2 \cdot 2e^{2x} + 2x \cdot Ae^{2x} =$

$= 2Ae^{2x}(x^2 + x)$, och $y_p'' = 2Ae^{2x}(2x+1) +$

$+ 4Ae^{2x}(x^2 + x) = Ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2)$

Insättning ger: $y_p'' - 4y_p' + 4y_p =$

$= Ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2) - 8Ae^{2x}(x^2 + x) + 4Ax^2e^{2x} =$

$= Ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2 - 8x^2 - 8x + 4x^2)$

$= 2Ae^{2x} = e^{2x} \implies 2A = 1 \implies A = \frac{1}{2}$.

Så $\underline{y_p = \frac{x^2}{2}e^{2x}}$

10. Se boken kap. 5.2, eller lösningen på övningstentan.

Anonym kod	MVE415b Matematisk Analys 18 augusti 2015	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna integralen $\int x \arctan(x)\,dx$. $= \left\{ \begin{array}{l} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array} \right\} =$ (2,5p)

Lösning:

$$= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\left(x - \arctan(x)\right) + C$$

Svar: $\frac{1}{2}\arctan(x)(x^2+1) - \frac{x}{2} + C$

(b) Lös differentialekvationen $y' = e^{x+y}$. (2p)

Lösning:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y \iff \frac{dy}{e^y} = e^x\,dx \iff \int e^{-y}\,dy = \int e^x\,dx$$

$$\iff -e^{-y} = e^x + c \iff -y = \ln(c - e^x)$$

Svar: $y = -\ln(c - e^x)$

(c) Beräkna integralen (2,5p)

$$\int_1^{e^\pi} \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx. = \left\{ \begin{array}{ll} t = \ln(x) & x = 1 \iff t = 0 \\ dt = \frac{1}{x}dx & x = e^\pi \iff t = \pi \end{array} \right\} =$$

Lösning:

$$= \int_0^\pi \cos(t)\,dt = \left[\sin(t)\right]_0^\pi = \sin(\pi) - \sin(0) = 0.$$

Svar: 0

Var god vänd!

(d) Vad ska du ansätta om du vill göra en partialbråksuppdelning av (2p)

$$\frac{x^2+2}{(x^2+1)(x^2-1)}?$$

Lösning: $x^2-1=(x+1)(x-1)$, så vi ska ansätta

$$\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1}$$

Svar: ....

(e) Beräkna integralen (2p)

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}\,dx.$$

Lösning: Graden är högre i täljaren; vi gör polynomdiv.:

$$\begin{array}{r l}
 & x^2-x+1 \\
x+1 \,\big) & x^3 \\
 & -(x^3+x^2) \\
 & -x^2 \\
 & -(-x^2-x) \\
 & x \\
 & -(x+1) \\
 & -1
\end{array}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}\,dx = \int x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C$$

Svar: ....

(f) Lös differentialekvationen $y' + y/x + \sqrt{x} = 0$ för $x > 0$. (3p)

Lösning: Ekvationen är linjär av första ordningen:

$y'+\frac{1}{x}y=-\sqrt{x}$ $\int \frac{1}{x}\,dx=\ln(x)$, så den integrerande faktorn är $e^{\ln(x)}=x$.

$$xy'+y=-x^{3/2} \iff (xy)'=-x^{3/2} \iff xy=-\int x^{3/2}\,dx \iff$$

$$xy=-\frac{x^{5/2}}{5/2}+C \qquad y=-\frac{2x^{3/2}}{5}+\frac{C}{x}$$

Svar: ....