Lösningsförslag, MVE415b, 160603 (1/6)

Grundkunskaper

1 a) $I = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{4x^2+1}\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{(2x)^2+1}\,dx = \left[\begin{matrix} t = 2x & -\tfrac{1}{2} \to -1 \\ \frac{dt}{dx} = 2,\ dx & \tfrac{1}{2} \to 1 \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2+1}\,dt =$

$= \frac{1}{2}\left[\arctan t\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(\arctan 1 - \arctan(-1)) = \frac{1}{2}(\arctan 1 + \arctan 1) =$

$= \arctan 1 = \underline{\underline{\pi/4}}$ Notera: Jämn funktion på jämnt intervall

så $I = 2\int_0^{1/2} \frac{1}{4x^2+1}\,dx = (\text{PSS}) = \left[\arctan t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \underline{\underline{\pi/4}}$

Vilket ju är en liten förenkling.

b) $y' = y + x \Leftrightarrow y' - y = x \Leftrightarrow y' + (-1)y = x$ 1:a ord. linjär.

IF: $e^{\int -1\,dx} = e^{-x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{-x}y) = xe^{-x} \Rightarrow e^{-x}y = \int \frac{d}{dx}(e^{-x}y)\,dx =$

$= \int xe^{-x}\,dx = [\text{PI}] = x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx =$

$= -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C \Rightarrow y = -(x+1) + Ce^{x}$, C konst.

Kon: $y' = -1 + Ce^{x}$ så $y' - y = -1 + Ce^{x} - (-(x+1) + Ce^{x}) = x$ så OK.

c) $\int \tan x\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\sin x\,dx = \left[\begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{matrix}\right] = \int \frac{1}{t}(-dt) =$

$= -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$, C konst.

Kon: $\frac{d}{dx}(-\ln|\cos x| + C) = -\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\cos x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = \tan x$ så OK

d) $\int xe^{-x}\,dx = [\text{PI}] = (\text{se 1b) ovan}) = -(x+1)e^{-x} + C$

e) $I = \int_{\pi/4}^{\pi} \sin^2 x\,dx$ och additionsformeln för cos ger

$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x\cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x =$

(trig ettan) $= 1 - 2\sin^2 x \therefore \sin^2 x = (1 - \cos(2x))/2$ så

$I = \int_{\pi/4}^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi} = \frac{1}{2}\left(\pi - 0 - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\right) =$

$= \frac{3\pi + 2}{8}$

f) $y''-3y'+2y=x$ (2:a ordningen) Ansätt $\Rightarrow y=y_p+y_h$

Konstanta koeff. $\Rightarrow$ y_h ges mha kar. ekv $0=r^2-3r+2=$
$=(r-1)(r-2) \Rightarrow y_h=C_1e^x+C_2e^{2x}$ (C_i godtyckl. konst.)

För y_p ansätt $y_p=x^m(Ax+B)=(m=0)=Ax+B$, $y_p'=A$,
$y_p''=0$ Insättning i ODE:n ger $x=y_p''-3y_p'+2y_p=$
$=0-3A+2(Ax+B)$ Ident. av koeff. $\Rightarrow$

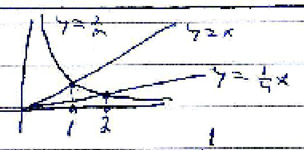
$$\begin{cases} 2A=1 \\ -3A+2B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/2 \\ B=3/4 \end{cases}$$

$\therefore y_p=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}+C_1e^x+C_2e^{2x}$

---

2) $x>0$



Vi ser alltså att sökt area $A=$

$$=\int_0^1 x-\frac{1}{4}x\,dx+\int_1^2\frac{1}{x}-\frac{1}{4}x\,dx=\int_0^1\frac{3}{4}x\,dx+\left[\ln|x|-\frac{1}{8}x^2\right]_1^2=$$

$$=\frac{3}{8}\left[x^2\right]_0^1+\left[\ln|x|-\frac{1}{8}x^2\right]_1^2=\dots\dots=\underline{\ln 2}$$

---

3) **OBS:** Uppgiften borde/skulle egentligen varit $y'+y=x$ men tyvärr så insmög sig ett redigeringsfel och minustecknet hamnade i uppgift 4 i stället: $x^2+-5x+6=x^2+(-5x)+6=x^2-5x+6$ vilket där skulle det också vara men det skulle även ha varit i denna uppgiften 3a). Vi får dock ta uppgiften som i tesen alltså $y'-y=x$.

a) se 1b): $y=-(x+1)+Ce^x$

b) $y'=y^2$ separabel. Vi ser att $y=0$ på $\mathbb{R}$ är en potentiellt singulär lösning. Om $y\neq 0$ så $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{\cancel{dx}}=1\,dx \Rightarrow$
$-\frac{1}{y}=x+C_1$, $C_1\in\mathbb{R} \Rightarrow y=-\frac{1}{x+C_1}=\frac{1}{-C_1-x}=\frac{1}{C-x}$, $C\in\mathbb{R}$ $\therefore y=\begin{cases}0 & \text{singulär lösning} \\ \frac{1}{C-x} & C\in\mathbb{R} \text{ allmän lösning}\end{cases}$

4) $\int \frac{x+4}{x^2+(-5x)+6}dx = \int \frac{x+4}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{x+4}{(x-2)(x-3)}dx = \int \frac{-6}{x-2} + \frac{7}{x-3}\,dx =$

$= -6\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + C$ där vi använt Partialbråksuppdelning

$\frac{x+4}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \left\{\begin{array}{l} A \text{ och } B \text{ bestäms genom att} \\ \text{gör lika och identifiera} \\ \text{polynomen i täljarna} \\ \text{eller genom handpåläggning} \end{array}\right\} = \frac{-6}{x-2} + \frac{7}{x-3}$

5) $y'' - y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. Ja och Lösning

så $y = y_p + y_h$ och där konstanta koeff. bestäms y_h

med karekv. $0 = r^2 - 1 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$

För y_p: Ansätt $y_p = x^m(Ax+B) = (m=0) = Ax+B$

$\Rightarrow y_p' = A$, $y_p'' = 0 \Rightarrow$ (Insättning) $\Rightarrow x = y_p'' - y_p = 0 - (Ax+B)$

$\Rightarrow \begin{cases} -A = 1 \\ -B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow y_p = -x \therefore y = -x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$

$\Rightarrow y' = -1 - C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$ så RV $\Rightarrow \begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 2 = -1 - C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow C_1 = -3/2$, $C_2 = 3/2$ är sökt lösning $y = -x - \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}e^{x}$

Kolla!!!

6) $\int \cos\sqrt{x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow \\ x = t^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t\,dt \end{array}\right] = \int \cos t\,(2t\,dt) =$

$= 2\int t\cos t\,dt = [PI] = 2\left(t\sin t - \int 1\cdot\sin t\,dt\right) =$

$= 2\left(t\sin t - (-\cos t + C_0)\right) = 2t\sin t + 2\cos t + C =$

$= 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$

Koll: $\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C\right) = \ldots\ldots = \cos\sqrt{x}$, Ok

7) Se lärsboken

Överbetygsdelen

8) $y''-5y'+6y=e^{2x}$ 2:a ordn. linjär med konst. koeff. $\Rightarrow y=y_p+y_h$ och y_h fås av karakt. ekv. rötter: $0=r^2-5r+6=(r-2)(r-3) \Rightarrow$
$y_h=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ Ansätt $y_p=x^m(Ce^{2x})=(m=1)=$
$=Cxe^{2x} \Rightarrow y_p'=Ce^{2x}+2Cxe^{2x}=Ce^{2x}+2y_p \Rightarrow$
$y_p''=2Ce^{2x}+2y_p'=2Ce^{2x}+2(Ce^{2x}+2y_p)=4Ce^{2x}+4y_p$
$\therefore e^{2x}=y_p''-5y_p'+6y_p=4Ce^{2x}+4y_p-5(Ce^{2x}+2y_p)+6y_p=$
$=-Ce^{2x}$ $\therefore$ $C=-1$ $\therefore$ $y_p=-xe^{2x}+C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

9) $I=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ Då $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ är kontinuerlig på $(0,\infty)$ så är integralen I generaliserad av bara två skäl: 1) Obegränsat intervall
2) integranden obegränsad i intervalländpunkten $x=0$.
Vi renodlar dessa två skäl var för sig genom att dela upp $I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx \equiv I_1+I_2$

(Obs: vi kunde valt att uppdela $(0,\infty)$ i $(0,x_0]\cup[x_0,\infty)$ för vilket $x_0\in(0,\infty)$ som helst istf $x_0=1$; men det naturliga valet är ju $x_0=1$)

För I_1: $0\le\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x\in(0,1]$

och I_2: $0\le\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\le\frac{1}{\sqrt{x}\,x}=\frac{1}{x^{3/2}}$ $\forall x\in[1,\infty)$

Då integralerna $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ och $\int_1^\infty\frac{1}{x^{3/2}}dx$ båda är

konvergenta får vi med Jämförelsekriteriet för positiva integrander att både I_1 och I_2 är konv. så då är alltså $I=I_1+I_2$ konvergent.

forts Lösningsförslag MVE415.5, 160603 (5/6)

10) $I = \int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx$ Integranden är ett rationellt uttryck; ett polynom dividerat med ett polynom. Grad nämnare > grad täljare så ingen division nödvändig. Faktorisera nämnarens reella polynom som en produkt av reella förstagradspolynom om möjligt. Då $x^2+2x+3=(x+1)^2+2 \geq 2 > 0$ så finns inga reella nollställen och det går alltså inte faktorisera nämnaren i reella polynom av lägre grad; vi behåller därför nämnaren som den är. Vi ser då att täljaren kan skrivas om så att vi får en term som är precis derivatan av nämnaren:

$$\frac{x}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{2}{x^2+2x+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{1}{(x+1)^2+2}$$

och båda dessa termer är det lätt att finna primitiv till. I den andra termen (som innehåller i stort sett en arctan som primitiv) gör vi en lämplig substitution; men det är nog lättare att göra den innan vi lägger till och drar ifrån i täljaren för att få in derivatan. Vi gör så istället!

$$I = \int \frac{x}{(x+1)^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx = \left[t = \frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}t-1}{t^2+1}\sqrt{2}\,dt = \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt - \sqrt{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \ln|t^2+1| - \sqrt{2}\arctan t + C = \ln\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right) - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= \ln\left(\frac{x^2+2x+3}{2}\right) - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C = \left[\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b\right] =$$

$$= \ln(x^2+2x+3) - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$ där $-\ln 2$

är inkluderat i den godtyckliga konstanten c. ∎

11) $y' = 2(y^2-1)x$ separabel. Vi ser att $y=-1$ och $y=1$ är två potentiellt singulära lösningar. Om $y^2 \neq 1$ så fås $\frac{1}{y^2-1}\frac{dy}{dx} = 2x\,dx \Rightarrow x^2 = \int 2x\,dx = \int \frac{1}{y^2-1}\,dy =$

$= [PBU] = \int \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1}\,dy = [HP] = \int \frac{-1/2}{y+1} + \frac{1/2}{y-1}\,dy =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\,dy = \frac{1}{2}\left(\ln|y-1| - \ln|y+1|\right) + C_1 \quad C_1 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 2x^2 + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{2x^2+C_2} = e^{C_2}e^{2x^2} \Leftrightarrow \pm\frac{y-1}{y+1} = C_3 e^{2x^2}$

$C_3 > 0 \Rightarrow \frac{y-1}{y+1} = \pm C_3 e^{2x^2} = C_4 e^{2x^2}, \quad C_4 \neq 0$

$\Rightarrow y-1 = (y+1)C_4 e^{2x^2} \Rightarrow (C_4 e^{2x^2} - 1)y = -(C_4 e^{2x^2}+1)$

$\Rightarrow y = \frac{C_4 e^{2x^2}+1}{1-C_4 e^{2x^2}} = \frac{1-Ce^{2x^2}}{1+Ce^{2x^2}}, \quad C \neq 0$

Om vi här låter $C=0$ får vi $y = \frac{1-0}{1+0} = 1$

$\therefore$ $y=1$ ej singulär utan kan inordnas i den allmänna lösningen. Däremot kan inte $y=-1$ inordnas i den allmänna: $\frac{1-Ce^{2x^2}}{1+Ce^{2x^2}} = -1 \Leftrightarrow 1 - Ce^{2x^2} = -(1+Ce^{2x^2}) \Leftrightarrow 1 = -1$

$\therefore \quad y = \begin{cases} \frac{1-Ce^{2x^2}}{1+Ce^{2x^2}} & C \in \mathbb{R} \quad \text{allmän lösning} \\ -1 & \text{singulär lösning} \end{cases}$

∎