Lösningar till Matematisk Analys, del 2, (MVE415b) 2017-06-02

1. **a)** $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx = \Big[t=2x\Big] = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{2}\Big[\arcsin t\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{\pi}{4}$,
b) $y' = 2y+1 \Leftrightarrow y' + (-2)y = 1$, linjär. IF: $e^{\int -2\,dx} = e^{-2x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{-2x}y) = e^{-2x} \Rightarrow e^{-2x}y = \int \frac{d}{dx}(e^{-2x}y)\,dx = \int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C \Rightarrow y = -\frac{1}{2} + Ce^{2x},\ C \in \mathbb{R}$. **c)** $\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \Big[t = \sin x\Big] = \int 1 - t^2\,dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$. **d)** $\int xe^x\,dx = \Big[\text{PI}\Big] = xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$.
e) $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x\cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \int_{\pi/4}^{\pi} \cos^2 x\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\Big[x + \frac{\sin(2x)}{2}\Big]_{\pi/4}^{\pi} = \frac{1}{4}(\frac{3\pi}{2} - 1)$. **f)** $3y'' - 5y' + 2y = x+1$ är linjär med konstanta koefficienter så $y = y_p + y_h$ med karakteristisk ekvation: $0 = 3r^2 - 5r + 2 = (r-1)(r-2/3)$. Då får vi att $y_h = C_1e^{2x/3} + C_2e^x$. För y_p ansätter vi $y_p = x^m(ax+b) = \Big[\text{m=0}\Big] = ax+b,\ y_p' = a,\ y_p'' = 0 \therefore x+1 = 3y_p'' - 5y_p' + 2y_p = 0 - 5a + 2(ax+b) \Rightarrow a = 1/2,\ b = 7/4 \therefore y = y_p + y_h = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4} + C_1e^{2x/3} + C_2e^x$.

2. Arean $= \int_1^{\sqrt{3}} 3 - x^2\,dx = \Big[x^2\Big]_0^1 + \Big[3x - \frac{x^3}{3}\Big]_1^{\sqrt{3}} = 1 + (3\sqrt{3} - \frac{(\sqrt{3})^3}{3} - (3 - \frac{1}{3})) = 2\sqrt{3} - \frac{5}{3}$.

3. a) $\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$, b) $\int_{-4}^{4} e^x - e^{-x}\,dx = \Big[\text{udda integral, jämnt intervall}\Big] = 0$, c) $\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \Big[t = e^x + 1\Big] = \int \frac{1}{t}\frac{1}{t-1}\,dt = \Big[\text{PBU}\Big] = \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\,dt = \ln|t-1| - \ln|t| + C = x - \ln(e^x+1) + C$, d) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{(2+\sin t)^2}\,dt = \Big[\text{inre derivata}\Big] = \Big[x = 2 + \sin t\Big] = \int_2^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_2^3 = -(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$, e) $\int x\cos x\,dx = \ldots = \Big[\text{PI}\Big] = x\sin x + \cos x + C$.

4. a) $y' - \frac{1}{x}y = x$, linjär, IF: $e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}y) = \frac{1}{x}x = 1 \Rightarrow \frac{1}{x}y = \int \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}y)\,dx = \int 1\,dx = x + C \Rightarrow y = x^2 + Cx$, b) $y' = y^2$, separabel. Vi ser att $y = 0$ är lösning och om $y \neq 0$ så har vi $\frac{1}{y^2}y' = 1 \Rightarrow \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 1\,dx = x + C \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C,\ C \in \mathbb{R}$. Vi får då att $y = -\frac{1}{x+C} = \frac{1}{C-x},\ C \in \mathbb{R}$. Vi har då att $y = 0$ är singulär lösning och $y = \frac{1}{C-x},\ C \in \mathbb{R}$. är allmän lösning. Sökt lösning är alltså $y = 0$.

5. Ekvationen $y'' + 7y' + 10y = e^x$ är andra ordningens linjär ODE med konstanta koefficiente och har lösning $y = y_p + y_h$. För y_h konstaterar vi att karakteristiska ekvationen är $r^2 + 7r + 10 = 0$ som har rötter -2 och -5 så $y_h = C_1e^{-5x} + C_2e^{-2x}$. Ansätt $y_p = x^mCe^x = \Big[\text{m=0}\Big] = Ce^x \Rightarrow y_p = y_p' = y_p'' \Rightarrow 18Ce^x = e^x \Rightarrow C = 1/18 \Rightarrow y = y_p + y_h = \frac{1}{18}e^x + C_1e^{-5x} + C_2e^{-2x}$.

6. Se kurslitteraturen.

Överbetygsdelen

---

7. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \Big[t = \arcsin x\Big] = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt \frac{1}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2} + C) = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$.

8. $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 1}{x^2 + 4x + 5}\,dx = \int x + \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int x + \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \arctan(x+2) + C$.

9. Se kurslitteraturen; iterationsformeln för punkter (x_k, y_k) med steglängd h är $y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1})$.

10. Låt $x(t)$ = mängden salt i behållaren vid tiden t. Förändringen av mängden salt i behållaren är $\frac{dx}{dt}(t)$ = mängden salt in - mängden salt ut, i kg per tidsenhet. Tidsenhet = "en passande klockenhet- en minut. $\frac{dx}{dt}(t) = \frac{10\cdot 10}{1000} - \frac{x}{1000}\cdot 10 = \frac{1}{10} - \frac{x}{100} = \frac{10-x}{100} \Leftrightarrow x' = \frac{10-x}{100}$, (separabel och även linjär). Om $x \neq 10$ så gäller $\frac{1}{10-x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{100} \Rightarrow \int \frac{1}{10-x}\,dx = \int \frac{1}{100}\,dt \Rightarrow \ldots \Rightarrow x(t) = 10 + Ce^{-t/100},\ C \neq 0$. Då $x = 10$ är en lösning fås $x(t) = 10 + Ce^{-t/100},\ C \in \mathbb{R}$. Vidare ger $x(0) = 50$ att $C = 40$ så $x(40) = 10 + 40e^{-2/5} \approx 36,8 \approx 40$ kg salt i behållaren vid $t = 40$.