

1. a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+(x/2)^2}} dx = \left[t = \frac{x}{2} \right] = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} 2 dt = \left[\ln |t + \sqrt{1+t^2}| \right]_0^{1/2} = \ln \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right|$,
 b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{3}x)^2}} dx = \left[t = \sqrt{3}x \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} (\arcsin t + C) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(\sqrt{3}x) + C$, c) $y' + (-\frac{1}{x})y = x$,
 linjär. IF: $e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}y) = \frac{1}{x}x = 1 \Rightarrow \frac{1}{x}y = \int 1 dx = x + C \Rightarrow y = x^2 + Cx$, d)
 $\int \cos^2 x \sin x dx = \left[\text{inre derivata, } t = \cos x, \frac{dt}{dx} = -\sin x \right] = \int t^2(-dt) = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$,
 e) $\int x \cos x dx = \left[\text{PI} \right] = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C$, f) $y'' - 3y' + 2y = 0$ är linjär med konstanta koefficienter så $y = y_p + y_h$ med karakteristisk ekvation: $0 = r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$. Då får vi att $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. För y_p antar vi $y_p = x^m(ax+b) = \left[m=0 \right] = ax+b$, $y'_p = a$, $y''_p = 0 \therefore x+1 = y''_p - 3y'_p + 2y_p = 0 - 3a + 2(ax+b) \Rightarrow 2a = 1, -3a + 2b = 1 \Rightarrow a = 1/2, b = 5/4 \therefore y = y_p + y_h = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

2. $y = x^2 + x \ln x, y' = 2x + \ln x + 1, y'' = 2 + (1/x)$ Insättning ger att y löser ekvationen i a) och c) men ej b).

3. a) $\int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \left[t=2x \right] = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \arctan t + C = \frac{1}{2} \arctan(2x) + C$, b) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \left[\text{Listan} \right] = \tan x + C$,
 c) $\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\text{inre derivata, } t = x^2 + 1, \frac{dt}{dx} = 2x, 0 \rightarrow 1, 2\sqrt{2} \rightarrow 9 \right] = \frac{1}{2} \int_1^9 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} (\ln 9 - \ln 1) = \ln 3$,
 d) $\int e^{\sqrt{x}} dx = \left[t = \sqrt{x} \right] = 2 \int t e^t dt = \left[\text{PI} \right] = 2(t e^t - \int 1 \cdot e^t dt) = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$ e) Bootstrapping: $I \equiv \int e^x \sin x dx = \left[\text{PI} \right] = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = \left[\text{PI} \right] = e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx) = e^x (\sin x - \cos x) - I \therefore 2I = (\sin x - \cos x)e^x + C \Rightarrow \int e^x \sin x dx = I = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + C$

4. a) $y' + y = x$, linjär, IF: $e^{\int 1 dx} = e^x \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^x y) = x e^x \Rightarrow e^x y = \int \frac{d}{dx}(e^x y) dx = \int x e^x dx = \left[\text{PI} \right] = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = (x-1)e^x + C \Rightarrow y = x - 1 + C e^{-x}$, b) $y' = y^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2+1} y' = 1$, separabel $\Rightarrow \arctan y = \int \frac{1}{y^2+1} dy = \int 1 dx = x + C \Rightarrow y = \tan(x + C), C \in \mathbb{R}$.

5. Den aktuella arean är arean av det delområde i \mathbb{R}^2 som ligger i första kvadranten under linjen $y = 2x + 1$ och ovanför grafen till den kvadratiske kurvan $y = x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = (x - \frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16} + 1 = (x - \frac{5}{4})^2 - \frac{9}{16}$. Graferna skär varandra i punkterna (0, 1) och (9/2, 10). Kurvan ligger i första kvadranten under den räta linjen då $0 \leq x \leq 9/2$ och kurvan skär x-axeln i punkterna (1/2, 0) och (2, 0). Arean A ges alltså som $A = \int_0^{1/2} 2x+1 - (x^2 - \frac{5}{2}x + 1) dx + \int_{1/2}^2 2x+1 dx + \int_2^{9/2} 2x+1 - (x^2 - \frac{5}{2}x + 1) dx$ och detta blir om man räknar ut det (vilket man alltså inte behöver göra) cirka 20.

6. a) och b) har lösning $y = y_p + y_h$ där $y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-5x}$. För a), ansätt $y_p = C e^x \Rightarrow \dots \Rightarrow y_p = \frac{1}{18} e^x$. För b), ansätt $y_p = C e^{3x} \Rightarrow \dots \Rightarrow y_p = \frac{1}{40} e^{3x}$. Lämpligen väljer man väl att lösa a) som ju är något lite enklare att lösa. För c), se kurslitteraturen.

Överbetygsdelen

7. Kirchoffs spänningslag ger $V = RI + L \frac{dI}{dt}$. Vi ser ju att om en jämviktsström uppnås så är denna ström I ju konstant och därför uppfyller $\frac{dI}{dt} = 0$ och därmed gäller $V = RI + 0$ så jämviktsströmmen är alltså $I = V/R$.

Vi löser nu problemet genom att lösa en ODE. Vi har att ODE:n ger $I' + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L}$ som är linjär med integrerande faktor IF: $e^{\int \frac{R}{L} dt} = e^{\frac{R}{L}t} \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{\frac{R}{L}t} I) = \frac{V}{L} e^{\frac{R}{L}t} \Rightarrow e^{\frac{R}{L}t} I = \int \frac{d}{dt}(e^{\frac{R}{L}t} I) dt = \int \frac{V}{L} e^{\frac{R}{L}t} dt = \frac{V}{L} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C \Rightarrow I(t) = \frac{V}{R} (1 + C e^{-\frac{R}{L}t}) \rightarrow \frac{V}{R}$ då $t \rightarrow \infty$; d v s jämviktsströmmen är, som vi ju såg ovan också, just $\frac{V}{R}$.

8. $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \left[\text{PBU} \right] = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-2} dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C$.

9. $y' = y(1 - y)$ Vi ser att $y=0$ och $y=1$ är potentiellt singulära lösningar. Om $y \neq 0$ och $y \neq 1$ så gäller att $y' = y(1 - y) \Rightarrow \frac{1}{y(1 - y)} \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{1}{y(1 - y)} dy = 1 dx \Rightarrow \int \frac{1}{y(1 - y)} dy = \int 1 dx \Rightarrow$ för godtycklig konstant C_1 gäller $x + C_1 = \int \frac{1}{y(1 - y)} dy = [\text{PBU}] = \int \frac{1}{y} + \frac{1}{1 - y} dy = \ln|y| - \ln|1 - y|$ plus ngn konstant som vi bakar in i $C_1 \therefore \ln\left|\frac{y}{1 - y}\right| = x + C_1 \Rightarrow \left|\frac{y}{1 - y}\right| = e^{x+C_1} = e^{C_1} e^x = C_2 e^x$ där $C_2 > 0$ som ger $\frac{y}{1 - y} = \pm C_2 e^x = C e^x$ där $C \neq 0 \therefore y = C e^x (1 - y) \Rightarrow y = \frac{C e^x}{1 + C e^x}$, $C \neq 0$. Vi får då genom att tillåta även $C = 0$ (som ger lösningen $y=0$) att lösningarna ges som $y = \frac{C e^x}{1 + C e^x}$, $C \in \mathbb{R}$, allmän lösning, och $y = 1$ (som inte finns med i den allmänna lösningen för ngt val av konstant C) som är singulär lösning.

10. $y'' + 2y' + 2y = x \sin x$, linjär $\Rightarrow y = y_p + y_h$. För y_h : karakteristiska ekvationen $0 = r^2 + 2r + 2 = (r + 1)^2 + 1 \Rightarrow r_{1,2} = -1 \pm i \Rightarrow y_h = K_1 e^{(-1-i)x} + K_2 e^{(-1+i)x} = [\text{reell form}] = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. För y_p : Ansätt $y_p = (Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x \Rightarrow y_p' = A \sin x + (Ax + B) \cos x + C \cos x - (Cx + D) \sin x$, $y_p'' = A \cos x + A \cos x - (Ax + B) \sin x - C \sin x - C \sin x - (Cx + D) \cos x = (2A - D - Cx) \cos x - (Ax + B + 2C) \sin x$. Insättning i ekvationen ger $x \sin x = y_p'' + 2y_p' + 2y_p = (2A - D - Cx + 2(Ax + B + C) + 2(Cx + D)) \cos x + (-(Ax + B + 2C) + 2(A - (Cx + D)) + 2(Ax + B)) \sin x$

$$\therefore \begin{cases} 2A + C & = 0 \\ 2A + 2B + 2C + D & = 0 \\ A - 2C & = 1 \\ 2A + B - 2C - 2D & = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 1/5, B = -2/25, C = -2/5, D = 14/25.$$

$\therefore y = \left(\frac{x}{5} - \frac{2}{25}\right) \sin x + \left(-\frac{2}{5}x + \frac{14}{25}\right) \cos x + e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$, $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.