

MVE545, Matematisk Analys, del2, D11/E11

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från dugga 2018 räknas med, men maximal poäng på denna del är 38 och bonuspoäng kan bara användas för att få godkänt. För betyg 4 krävs 33 poäng, varav minst 4 poäng på andra delen av tentan. För betyg 5 krävs 43 poäng sammanlagt, varav minst 6 poäng på andra delen av tentan. Redovisa dina lösningar tydligt så att tankegångarna blir lätta att följa.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Till vilken/vilka (om någon överhuvudtaget) av följande tre differentialekvationer, är funktionen $y = y(x) = 2e^{2x}$ en lösning: (3p)
 - (a) $y'y'' = (y')^2$,
 - (b) $y'' - 4y' + 4y = 0$,
 - (c) $y' - 2xy^2 = 0$.

3. Skissa graferna och beräkna area av det ändliga område i första kvadranten av xy-planet (dvs det område i xy-planet där både x och y är större än eller lika med noll) som begränsas av linjen $y = x$ och parabeln $y^2 = 2 - x$. **Ledning:** För att enkelt skissa grafen till parabeln, betrakta $x = x(y)$ som en funktion av y och skissa dess graf i yx-systemet. (4p)

4. Lös **a)** begynnelsevärdesproblemet $y' + ky = 0$, $y(0) = m$ där k och m är reella konstanter. Finn om möjligt lösningar y till $y' - 2xy^2 = 0$ sådana att **b)** $y(0) = 1$, **c)** $y(0) = -1$ respektive **d)** $y(0) = 0$. (2+1+1+1p)

5. Lös differentialekvationen $y'' + 7y' + 10y = x + 3$ (4p)

6. Partialbråksuppdelning $\frac{2x^2 + x - 3}{(x + 1)^2(x + 2)}$. (3p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkänthöjden. Redovisa dina lösningar tydligt så att tankegångarna blir lätta att följa.

7. Låt $y(t)$ vara vattennivån i meter vid tiden t sekunder i en tank med konstant tvärsnittsarea $A \text{ m}^2$. Vatten tappas ut genom ett hål i tankens botten med tvärsnittsarea $a \text{ m}^2$. För vätskenivån vid tidpunkten $t = 0$ gäller $y(0) = h$ där $h > 0$ är en konstant. Energikonservering för det utströmmande vattnets rörelseenergi och potentialenergin hos tankens vatten ger *Torricellis lag* (som justeras med en utströmningskoefficient för att modifiera för bl a energiförlusten vid utströmning) som beskriver vattnets utströmningshastighet och denna utströmning ger i sin tur en förändring av tankens vattennivå, som alltså naturligen modelleras med derivatan av vattennivån; dvs med $\frac{dy}{dt} = y'$. Detta leder till ett begynnelsevärdesproblem för en ODE $y' = -k\sqrt{y}$, $y(0) = h$, där k är en positiv konstant (som beror på konstanter nämnda ovan). Denna ODE är separabel och lätt att lösa; **a)** gör det. Man finner att lösningen ges av $\sqrt{y} = -\frac{k}{2}t + \sqrt{h}$. Finn **b)** tankens tömningstid T ; den tid det tar innan tanken är tom. Förklara **c)** varför det enligt modellen inte finns något vatten i tanken efter denna tid T . (2+1+1p)
8. Ett gäng bananflugor samlades in och var en timme senare 128 stycken. Populationen förökar sig som vanligt snabbt och var efter ytterligare en timme, 512 st. Förökningshastigheten är proportionell mot populationens storlek. Hur många bananflugor samlades ursprungligen in? (3p)
9. Formulera och bevisa integral- och differentialkalkylens huvudsats; bägge delarna. (2p)
10. Avgör om integralen $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^{5/2} + x^{7/2}} dx$ är konvergent eller divergent. Förklara utförligt. (3p)

VA

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Låt $I \equiv \int_{-2}^2 e^{3x^2} dx$. Vilka (om överhuvudtaget något) av följande fem påståenden är korrekta: (2p)
i) $I = 0$, ii) $I < 0$, iii) $I \geq 0$, iv) $I > 0$, v) $I \leq 0$. Motivera väl!

Lösning:

Svar:

- (b) Beräkna integralen $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$. (2p)

Lösning:

Svar:

- (c) Lös differentialekvationen $y' - y = 1$. (2p)

Lösning:

Svar:

- (d) Lös differentialekvationen $y' + y = 1$. (2p)

Lösning:

Svar:

Var god vänd!

(e) Beräkna integralen $\int \cos^2 x \, dx$. (2p)

Lösning:

Svar:

(f) Lös differentialekvationen $y'' - 5y' + 6y = x$. (2p)

Lösning:

Svar:

(g) Beräkna integralen $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\tan(2x)}{(\tan x)^2 + 1} \, dx$. (2p)

Lösning:

Svar: