Lösningar till Matematisk Analys, del 2, (MVE545) 2019-06-08

1. **a)** $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \Big[x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \frac{\pi}{2} + \Big[\cos x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$, **b)** Alternativ b) är en linjär tredje ordningens ODE, **c)** $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin^2 x\,dx = 2\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \Big[x - \frac{sin(2x)}{2}\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$, **d)** A$=\int_0^1 \sqrt{x} - x^2\,dx = \Big[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, **e)** $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\tan x(\cos x + xe^{x^2})\,dx = 2\int_0^{\pi/4} x\tan x\cos x\,dx = 2\int_0^{\pi/4} x\sin x\,dx = 2(\Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4}\cos x\,dx) = 2(-\frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} + \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/4}) = \frac{2}{\sqrt{2}}(1 - \frac{\pi}{4})$, **f)** $y' + (-\frac{2}{x})y = x^2$ är linjär med IF: $e^{\int\frac{-2}{x}\,dx} = x^{-2} \Rightarrow \frac{1}{x^2}y = \int 1\,dx = x + C \Rightarrow y = x^3 + Cx^2$, **g)** $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x+1}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x+1}}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x+1}}\,dx \equiv I_1 + I_2$. För $0 < x < 1$ gäller $0 < \frac{1}{x^2+\sqrt{x+1}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ och då $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent enligt sats så ger Jämförelsekriteriet för positiva integrander att även $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x+1}}\,dx$ är konvergent. På samma sätt då ju för $1 < x < \infty$ gäller att $0 < \frac{1}{x^2+\sqrt{x+1}} < \frac{1}{x^2}$, har vi att I_2 är konvergent. Alltså är $I = I_1 + I_2$ konvergent.

2. **a)** $\int\sqrt{1-x}\,dx = \Big[t = 1-x\Big] - \int\sqrt{t}\,dt = -\frac{2}{3}t^{3/2} + C = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} + C$, **b)** $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \Big[\text{inre derivata, } t = 1-x^2\Big] = -\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{2}\frac{2}{3}t^{3/2} + C = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + C$, **c)** $\int x\ln x\,dx = \Big[\text{PI}\Big] = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$, **d)** $\int\frac{1}{\sqrt{4+x^2}} = \Big[\text{'Listan'}\Big] = \ln|x + \sqrt{4+x^2}| + C$, **e)** $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\,dx = \Big[t = x/2\Big] = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}2dt = \arcsin(\frac{x}{2}) + C$, **f)** $\int\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\int\sqrt{1-(x/2)^2}\,dx = \Big[t = \arcsin(x/2)\Big] = 2\int|\cos t|\cos t\,2dt = 4\int\cos^2 t\,dt = 4\int\frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt = 2(t + \frac{\sin(2t)}{2}) + C = 2\arcsin(\frac{x}{2}) + x\sqrt{1-(x/2)^2} + C = 2\arcsin(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + C$.

3. För $y'' + 2y' + y = f(x)$ har vi att $y = y_p + y_h$ och den karakteristiska ekvationen är $0 = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$ så $r = -1$ är en dubbelrot och $y_h = (C_1x + C_2)e^{-x}$. Vi vet ju att för en linjär homogen ekvation är alla lösningarna y_h eller alternativt om man vill, ser vi att $y = 0$ är en lösning så att vi kan ta för a) $y_p = 0$. För övriga y_p: ansätt b) $y_p = x^m(ax+b) = \Big[\text{m=0}\Big] = ax + b \Rightarrow y_p' = a,\ y_p'' = 0.\ \therefore 0 + 2a + ax + b = x \Rightarrow a = 1,\ b = -2 \Rightarrow y = x - 2 + (C_1x + C_2)e^{-x}$,
c) $y_p = x^mCe^x = \Big[\text{m=0}\Big] = Ce^x \Rightarrow y_p'' = y_p' = y_p \Rightarrow e^x = y_p'' + 2y_p' + y_p = 4y_p = 4Ce^x \Rightarrow C = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}e^x + (C_1x + C_2)e^{-x}$,
d) $y_p = x^mCe^{-x} = \Big[\text{m=2}\Big] = Cx^2e^{-x} \Rightarrow y_p' = 2Cxe^{-x} - Cx^2e^{-x} = 2Cxe^{-x} - y_p \Rightarrow y_p'' = 2Ce^{-x} - 2Cxe^{-x} - y_p' = 2Ce^{-x} - 4Cxe^{-x} + y_p\ \therefore e^{-x} = y_p'' + 2y_p' + y_p = 2Ce^{-x} - 4Cxe^{-x} + y_p + 4Cxe^{-x} - 2y_p + y_p = 2Ce^{-x} \Rightarrow C = \frac{1}{2}\ \therefore y_p = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$.

4. $\int\frac{x^3 - x + 1}{x^2 + x - 2}\,dx = \int x - 1 + \frac{2x-1}{x^2+x-2}\,dx$. Vi har PBU: $\frac{2x-1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}\Big[\text{HP}\Big] = \frac{1/3}{x-1} + \frac{5/3}{x+2}\ \therefore \int\frac{x^3-x+1}{x^2+x-2}\,dx = \int x - 1 + \frac{1/3}{x-1} + \frac{5/3}{x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3}(\ln|x-1| + 5\ln|x+2|) + C$.

5. $y^2y' = x^2y$. Vi ser att $y = 0$ är en lösning. Om $y \neq 0$ så får vi $y^2y' = x^2y$, separabel $\int y\,dy = \int x^2\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C_1 \Rightarrow y^2 = \frac{2}{3}x^3 + C,\quad C \in \mathbb{R}\ \therefore y^2 = \frac{2}{3}x^3 + C,\quad C \in \mathbb{R}$, allmän lösning $y = 0$, singulär lösning. För BVP ser vi att a) $y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 1$ uppfyller begynnelsevärdet och för b) ser vi att den singulära lösningen $y = 0$ och $y^2 = \frac{2}{3}x^3$ båda uppfyller begynnelsevärdet.

6. Se kurslitteraturen.

Överbetygsdelen

---

7. $y'' + y' - 2y = \cos x$ är linjär så $y = y_p + y_h$ och då karakteristiska ekvationen har nollställen -2 och 1 får vi att $y_h = C_1e^x + C_2e^{-2x}$. Ansätt $y_p = A\cos x + B\sin x$. Derivation och insättning i ekvationen och identifikation av koefficienter ger ekvationssystemet $A + 2B = 0,\ -3A + B = 1$ som har lösning $A = -3/10,\ B = 1/10$.

8. Kirchoffs spänningslag ger $V = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}$. Vi ser ju att om en jämviktsström uppnås så är denna ström I ju konstant 0 och därför uppfyller $I = 0$ och $\frac{dI}{dt} = 0$ och därmed gäller $V = \frac{Q}{C} + 0$ så jämviktsladdningen är alltså $Q = VC = 12 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{3}$.

Vi löser nu problemet genom att lösa en ODE. Vi har att $I = \dfrac{dQ}{dt}$ som vid insättning i ekvationen ger $L\dfrac{d^2Q}{dt^2} + R\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{Q}{C} = V$. Detta ger med de givna värdena $Q'' + 5Q' + \dfrac{9}{4}Q = 3$ som har lösning $Q = Q_p + Q_h$. Den karakteristiska ekvationen har rötter -9/2 och -1/2 så $Q_h(t) = C_1 e^{(-1/2)t} + C_2 e^{(-9/2)t}$. Ansättning av $y_p = C$, insättning i ekvationen och identifikation av koefficienter ger $C = 4/3$ så att $Q(t) = \dfrac{4}{3} + C_1 e^{(-1/2)t} + C_2 e^{(-9/2)t}$ som har $\lim_{t\to\infty} Q(t) = \dfrac{4}{3}$, vilket stämmer med det uträknade värdet ovan.

9. Vi faktoriserar karakteristiska polynomet: $r^{-}2r + 1 = (r-1)^2$. Detta ger faktorisering $(D-1)^2 y = -\dfrac{1}{x^2}e^x$ som ger ett ekvationssystem $(D-1)z = -\dfrac{1}{x^2}e^x, \quad (D-1)y = z$. Båda är första ordningens linjära ODE och löses med integrerande faktor; som i detta fall är densamma, e^{-x}, i båda fallen. Lösning för z först ger $z = \dfrac{1}{x}e^x + C_1 e^x$. Lösning därefter för y med data z given ger slutligen $y = e^x \ln x + C_1 x e^x + C_2 e^x$.

10. Se kurslitteraturen.