

MVE545, Matematisk Analys, del2, D11/E11

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från dugga 2019 räknas med, men maximal poäng på denna del är 38 och bonuspoäng kan bara användas för att få godkänt. För betyg 4 krävs 33 poäng, varav minst 4 poäng på andra delen av tentan. För betyg 5 krävs 43 poäng sammanlagt, varav minst 6 poäng på andra delen av tentan. Redovisa dina lösningar tydligt så att tankegångarna blir lätta att följa.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Beräkna a) $\int \sqrt{1-x} dx$, b) $\int x\sqrt{1-x^2} dx$, c) $\int x \ln x dx$, d) $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$,
e) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$, f) $\int \sqrt{4-x^2} dx$. (7p)

3. Betrakta ODE:n $y'' + 2y' + y = f(x)$ och lös ekvationen i fallen: a) $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$,
b) $f(x) = x$, c) $f(x) = e^x$, d) $f(x) = e^{-x}$. (5p)

4. Beräkna $\int \frac{x^3 - x + 1}{x^2 + x - 2} dx$. (4p)

5. Lös för differentialekvationen $y^2 y' = x^2 y$ begynnelsevärdesproblemen (BVP) där: a) $y(0) = 1$,
b) $y(0) = 0$. (4p)

6. Formulera och bevisa satsen om partialintegration, PI. (4p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntrönsen. Redovisa dina lösningar tydligt så att tankegångarna blir lätta att följa.

7. Lös $y'' + y' - 2y = \cos x$. (3p)

8. I en elektrisk krets är kopplat i serie en strömkälla med en konstant spänning V , en strömbrytare, en resistans om R Ohm, en induktans (spole) om L Henry och en kapacitans om C Farad. Spänningsfallet vid tiden t över resistansen är RI vid en ström $I = I(t)$ i kretsen, spänningsfallet över induktansen är $L \frac{dI}{dt}(t)$ och över kapacitansen $\frac{Q}{C}$ där $Q = Q(t)$ är laddningen över kapacitansen vid tiden t . Antag att $R = 20$, $L = 4$, $C = 1/9$ och $V = 12$ i respektive SI-enheter och att $Q(0) = 0$, $I(0) = 0$. Använd att $I = \frac{dQ}{dt}$ och Kirchoffs spänningslag för kretsen för att härleda en ODE som bestämmer laddningen $Q(t)$ i kapacitansen vid tiden t . Lös denna ODE och visa att det finns en jämviktladdning för kretsen; d v s bestäm $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$. Ge ett enkelt 'fysikaliskt' argument för att denna jämviktladdning är just det bestämda värdet. (3p)

9. Lös $y'' - 2y' + y = -\frac{1}{x^2}e^x$. (3p)

10. Formulera och bevisa integral- och differentialkalkylens huvudsats; bägge delarna. (3p)

VA

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna integralen $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$. (2p)

Lösning:

Svar:

(b) Vilken, om någon, av följande är en tredje ordningens linjär ODE: i) $y''' - (\sin y)x = x$, ii) $y''' + (\tan x)y = xy''$. Motivera ditt svar nogga. (2p)

Lösning:

Svar:

(c) Beräkna $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 x dx$. (2p)

Lösning:

Svar:

(d) Beräkna den ändliga arean mellan graferna till funktionerna $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ och $y = x^2$. (2p)

Lösning:

Svar:

(e) Beräkna integralen $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x \tan(x)(\cos x + xe^{x^2}) dx$. (2p)

Lösning:

Svar:

(f) Lös differentialekvationen $y' = \frac{2}{x}y + x^2$. (2p)

Lösning:

Svar:

(g) Är integralen $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x+1}} dx$ konvergent och/eller divergent? Motivera ditt svar utförligt. (2p)

Lösning:

Svar: