Lösningar och lösningstips till tenta för LNC022, 2015-06-01:

1. (a) Svar: $\cos v \approx -0,72,\ \tan v \approx -0,95$

   $\cos v$ är negativt för trubbiga vinklar, så med trigonometriska ettan är $\cos v = -\sqrt{1-\sin^2 v}$.
   Sedan är $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$.
   Man kan förstås även klara detta med räknaren, om man väljer rätt vinkel från sinusekvationen.

   (b) Svar: Tredje sidan kan vara $\sqrt{504} \approx 22,4$ cm eller $\sqrt{954} \approx 30,9$ cm

   De givna sidorna kan vara en katet och hypotenusan eller båda kateterna. Första fallet ger med Pythagoras sats $x^2 + 15^2 = 27^2$, det andra ger $15^2 + 27^2 = x^2$.

   (c) 12% ökning av sidan.

   Om k är förhållandet mellan sidorna i stora och lilla kuben, så är k^3 förhållandet mellan volymerna. Detta ger $k^3 = 1,40$ (140%) och $K = 1,40^{1/3} \approx 1,12$ (112%)

   (d) $y = 4\sin\dfrac{t}{3}$ $(A = 4$ och $\omega = \frac{1}{3})$

   Amplituden är maxvärdet och koefficienten framför sinus. Använd $\omega T = 2\pi$ (om T är perioden.

2. (a) $\sqrt{794} \approx 28,2$ cm

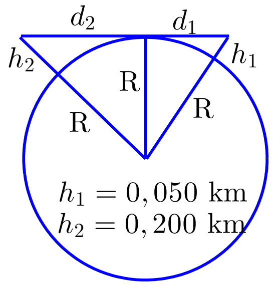
   Beräkna $4\vec{u} - 3\vec{v}$ i koordinatform och använd $|(a,b,c)| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

   (b) $\approx 109°$

   Använd skalärprodukten: $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$. Allt i högerledet kan beräknas med koordinaterna.

   (c) T. ex. $(1,1,-1)$ och $(1,-1,1)$.
   Se till att skalärprodukterna blir noll! Man kan hitta en vektor som samtidigt är vinkelrät mot båda: $(1,-11,3)$,
   men det begärdes inte.

3. Vi beräknar horisontavstånden för höjderna 50 m och 200 m och adderar dem, så får vi hela sikts-
   träckan.



Beräkna jordradien (ur omkretsen):

$$R = \frac{40000}{2\pi} \approx 6366,198 \text{ km}$$

och använd Pythagoras sats för horisontavstånden:

$$d_1^2 + R^2 = (R+h_1)^2 \quad \Rightarrow d_1 = \sqrt{2Rh_1 + h_1^2} = \sqrt{2 \cdot 6366,198 \cdot 0,050 + 0,050^2} \approx 25,231 \text{ km}$$

$$d_2^2 + R^2 = (R+h_2)^2 \quad \Rightarrow d_2 = \sqrt{2Rh_2 + h_2^2} = \sqrt{2 \cdot 6366,198 \cdot 0,200 + 0,200^2} \approx 50,463 \text{ km}$$

Slutligen: $d_1 + d_2 \approx 75,694$ km. Svar: **76 km**

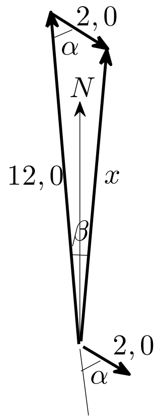
4. 94 m

I triangeln ABC vet man alla vinklarna (81°, 71° och 24°) och sidan AB=50 m. Beräkna sidan AC med sinussatsen: $AC = \dfrac{50 \sin 71°}{\sin 24°}$. Rita triangeln ACD (AC är nyss beräknad och CD är den lodräta mastens höjd, vinkeln vid A är given = 39°). Triangeln är rätvinklig, så vi kan beräkna CD med hjälp av att $\tan 39° = \dfrac{CD}{AC}$.

5. 131 cm^2

Sinussatsen ger oss vinkeln B som blir ca $65,18°$ eller $180° - 65,18° = 114,82°$. Man ser då att den sista vinkeln C blir $86,82°$ respektive $37,18°$. Eftersom sidan b ska vara största triangelsidan, så måste vinkeln B vara största vinkeln. Vi måste därför välja $B \approx 114,82°,\ C \approx 37,18°$. Man kan nu beräkna arean med areasatsen: $T = \frac{ab \sin C}{2}$.

6. Rita strömtriangeln och beräkna vinkeln $\alpha = 52,5°$ mellan strömmen och kontrakursen, som då blir den vinkel i triangeln som står mot sidan fög (=x i figuren). Då får man fög med cosinussatsen. Sedan beräknas vinkeln β mellan hastigheterna genom vatten och över grund med sinussatsen.



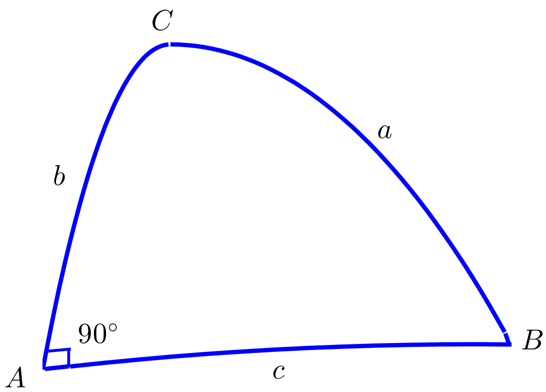
$$x^2 = 12,0^2 + 2,0^2 - 2 \cdot 12,0 \cdot 2,0 \cos 52,5° \qquad \Rightarrow x \approx 10,8986$$

$$\frac{\sin \beta}{2} = \frac{\sin 52,5°}{x} \qquad \Rightarrow \beta \approx 8,37°$$

Kursen över grund blir nu $355° + \beta - 360° \approx 3,37°$

Svar: **fög=11 (10,9) knop, kög=3,4**°.

7. (a) Använd den sfäriska triangeln med orterna A (start) och B (mål) och nordpolen C som hörn. Sidan c ges av distansen: $c = \frac{500^\circ}{60}$. Beräkna först med cosinussatsen (här Pythagoras) sidan a ($90^\circ - a$ är då latituden för B). Med vinkeln $A = 90^\circ$, sidorna a och c kan vi beräkna vinkeln C som är longituddifferensen mellan A och B.



Sfäriska Pythagoras sats:

$$\cos a = \cos b + \cos c \;\Rightarrow\; a \approx 26,126^\circ, \text{ latituden för B blir } 90^\circ - a \approx 63,874^\circ \approx 63^\circ 52'$$

Sfäriska sinussatsen (vi vet att $C < 90^\circ$, vi kan förstås också använda sfäriska cosinussatsen):

$$\frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin a} \;\Rightarrow\; C = \frac{\sin c}{\sin a} \approx 19,216^\circ$$

Longituden för B är alltså $19,216^\circ$ östligare än $12^\circ 05'$W, dvs $7,133^\circ \approx 7^\circ 8'$E.

Svar: **$63^\circ 52'$N, $7^\circ 8'$E**

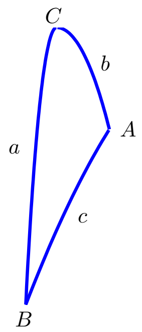
(b) Beräkna vinkeln B med färiska cosinussatsen, kursen är då $180^\circ - B$.

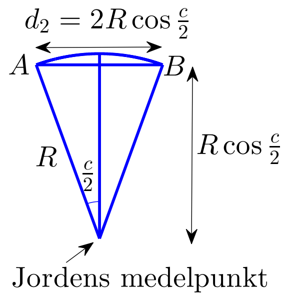
$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} \;\Rightarrow\; B \approx 72,6^\circ, \text{ kursen blir } 180^\circ - B \approx 107,4^\circ$$

Här hade vi också vågat använda sfäriska sinussatsen. Eftersom B har lägre latitud än A, så måste vinkeln B vara spetsig. Detta ger lite kortare räkningar, men man måste vara säker på vilken sinuslösning man ska välja!

Svar: **107°**

8. (a) Beräkna storcirkelbågen c mellan orterna; man får $c = 14.102°$. Detta ger oss avståndet d_1 längs storcirkeln, men också längs räta linjen: $d_2 = 2R\sin\frac{c}{2}$, vilket man ser om man ritar triangeln med jordens medelpunkt och de två orterna som hörn (se högra figuren!). Centrumvinkeln är c, klyv triangeln i två rätvinkliga!





,

Med $a = 90° - 69°03'36''$, $b = 90° - 55°20'18''$, $C = 20°32'55'' - 13°21'37''$ får vi:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \;\Rightarrow\; c \approx 14,10237°$$

Storcirkelavståndet är då $60c \approx 846,1422$ M $= 1,852 \cdot 846,1422 \approx 1567,055$ km.

$$d_2 = 2R\sin\frac{c}{2} \approx 1563,103 \text{ km}$$

Det senare värdet beror på hur man väljer R, här har jag valt att ta $2\pi R = 360 \cdot 60 \cdot 1,852$ km som ger $R \approx 6366,707$ km. Med värdet 40000 km för jordens omkrets, blir $R = 6366,198$ km, och $d_2 = 1562,978$ km. Med det första valet får vi differensen till 3,95 km.

Svar: **3,95 km**

(b) Det efterfrågade djupet blir $R - R\cos\frac{c}{2} \approx 48$ km (se högra figuren!). Svar: **48 km**