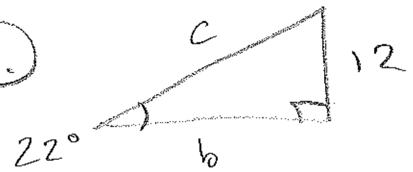
Lösningar Tenta LNC022

28/5 2016 Elin Gösmark

1. a.

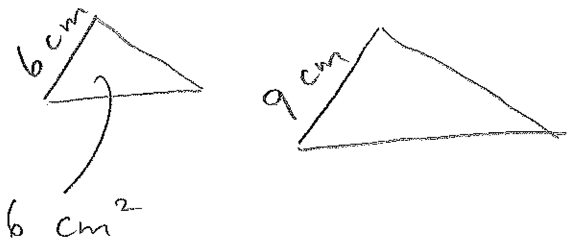


$\frac{12}{b} = \tan(22°)$, så

$$b = \frac{12}{\tan(22°)} \approx \underline{\underline{30 \text{ cm}}}.$$

$\frac{12}{c} = \sin(22°)$, så $c = \frac{12}{\sin(22°)} \approx \underline{\underline{32 \text{ cm}}}$

b.



Längdskalan är $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

så areaskalan är $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

Alltså är den större triangelns area $6 \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{2} =$

$= \underline{\underline{13,5 \text{ cm}^2}}$

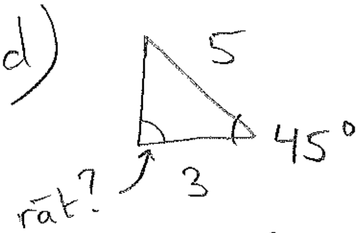
c) $\sin(v) = 0,3$ och $\sin^2(v) + \cos^2(v) = 1$, så

$\cos(v) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(v)} = \pm\sqrt{1 - 0,3^2} \approx \pm 0,95$

Eftersom vinkeln är trubbig ska vi välja

$\underline{\underline{\cos(v) = -0,95}}$.

d)



Om triangeln är rätvinklig måste de andra vinklarna vara 90° och 45°, och den tredje sidan 3 cm.

Men $3^2 + 3^2 = 18$ och $5^2 = 25$ så triangeln uppfyller inte Pythagoras sats och är alltså inte rätvinklig. Vi kan också se det genom att $\cos(45°) \neq 3/5$.

2) a) $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cos(v)$, där v är vinkeln mellan vektorerna. Så

$$\cos(v) = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{1 \cdot 5 + (-3) \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{-1}{\sqrt{10}\sqrt{29}} \approx -0{,}059$$

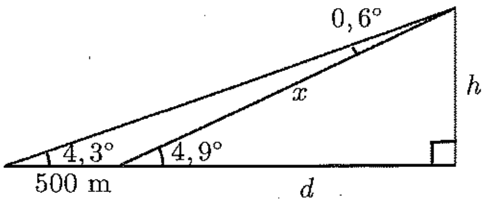
$$\underline{\underline{v \approx 93^\circ}}$$

b) $u + v = (1, -3) + (5, 2) = (6, -1)$

$$|u + v| = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37} \approx \underline{\underline{6{,}1}}$$

c) Vektorn $(3, 1)$ är vinkelrät mot $(1, -3)$ eftersom $(3, 1) \cdot (1, -3) = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 0$, vilket betyder att $\cos(v) = 0$, dvs $v = 90^\circ$.

3. I figuren finns de givna uppgifterna. Där är d det sökta avståndet och h mastens höjd.



(a) Vi använder sinussatsen på triangeln till vänster, där vi snart ser att den övre vinkeln är $0,6°$:

$$\frac{x}{\sin 4,3°} = \frac{500}{\sin 0,6°} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{500 \sin 4,3°}{\sin 0,6°}$$

I den högra rätvinkliga triangeln har vi nu

$$\cos 4,9° = \frac{d}{x} \quad \Rightarrow \quad d = x \cos 4,9° = \frac{500 \sin 4,3° \cos 4,9°}{\sin 0,6°} \approx 3567$$

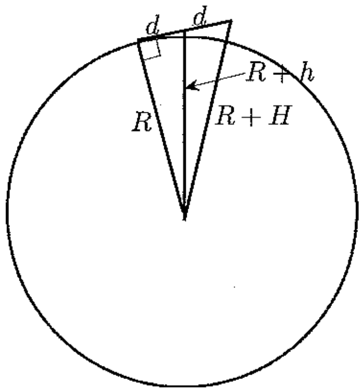
Avståndet är ca **3570** m.

(b) I sistnämnda triangel har vi också

$$\sin 4,9° = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad h = x \sin 4,9° = \frac{500 \sin 4,3° \sin 4,9°}{\sin 0,6°} \approx 306$$

Höjden är ca **306 m.**

4. Med $h = 5$ m och $R = 6367000$ m har vi situationen som visas i figuren (som förstås inte är skalenlig).



(a) Här är det d som söks. Pythagoras:

$$d^2 = (R+h)^2 - R \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{(R+h)^2 - R} \approx \sqrt{2Rh}$$

Vi får då $d \approx 7973$ m, så vi kan säga att avståndet är ca **8 km**.

(b) Här är det H som söks. Pythagoras:

$$(R+H)^2 = R^2 + (2d)^2 \quad \Rightarrow \quad H = \sqrt{R^2 + 4d^2} - R$$

Vi får $H = 20,00$ m. På ett avståndet av ca 16 km ska ska vara **20 m.**

5. Med $a = 5$, $b = 7$ och $A = 40°$ stämmer textens beskrivning med det vanliga beteckningssystemet (vinkel med stor bokstav, motstående sida med samma lilla bokstav). Lilla sidan heter då c. Sinussatsen ger

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \quad \Rightarrow \quad \sin B = \frac{7 \sin 40°}{5} \quad \Rightarrow \quad B \approx 64,1453° \text{ eller } B \approx 115,8547°$$

Med det spetsiga alternativet för B blir vinkeln C störst, med det trubbiga alternativet blir C minsta vinkeln. Eftersom minst sida står mot minst vinkel, så väljer vi $B \approx 115,8547°$, då blir $C = 180° - 40° - B \approx 24,1453°$. Sinussatsen igen ger sidan c:

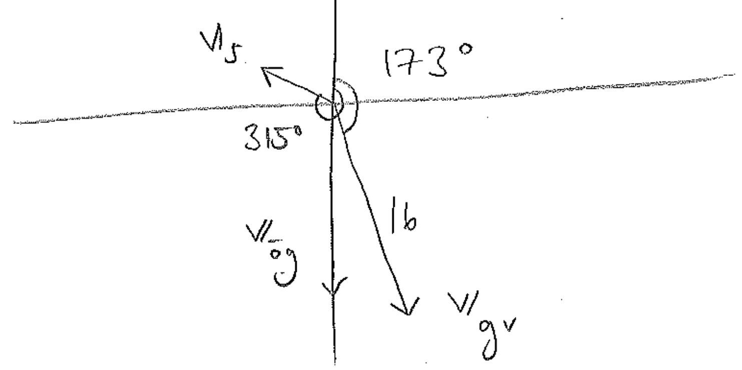
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{5 \sin C}{\sin 40°} \approx 3,1819$$

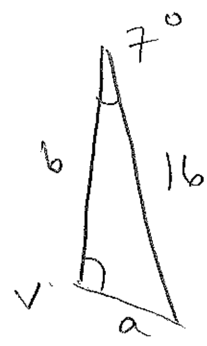
Minsta sidan är **3,2 cm.**

6.)

Vi söker $|V/_s|$ och $|V/_{ög}|$.

Vi får triangeln





$v = 315° - 180° =$
$= 135°.$

Sinussatsen ger: $\dfrac{\sin(135°)}{16} = \dfrac{\sin(7°)}{a}$, dvs

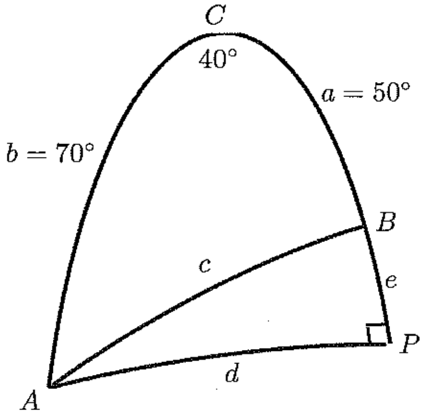
$$a = \frac{16\sin(7°)}{\sin(135°)} \approx \underline{\underline{2{,}8 \text{ knop}}}.$$

Den tredje vinkeln är $180° - 7° - 135° = 38°$.

Sinussatsen igen ger: $\dfrac{\sin(135°)}{16} = \dfrac{\sin(38°)}{b}$,

dvs $$b = \frac{16 \cdot \sin(38°)}{\sin(135°)} \approx \underline{\underline{13{,}9 \text{ knop}}}$$

7. I figuren är C nordpolen, P är punkten man seglar mot i första steget i uppgift (b).



(a) Här söks sidan c i figuren. Den beräknas med sfäriska cosinussatsen:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \quad \Rightarrow \quad c \approx 39,5310^\circ$$

Detta motsvarar sträckan $60c \approx$ **2372 M.**

(b) Här kan vi använda sfäriska sinussatsen (välj spetsig vinkel; vi vet att $d < 40^\circ$, på ekvatorn är ju avståndet till en annan meridian lika med longituddifferensen 40°, och här är det mindre).

$$\frac{\sin d}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin 90^\circ} \quad \Rightarrow \quad \sin d = \sin b \sin C \quad \Rightarrow \quad d \approx 37,1586^\circ$$

Den sfäriska Pythagoras sats kan användas på triangeln ACP:

$$\cos d \cos(a+e) = \cos b \quad \Rightarrow \quad a + e = \frac{\cos b}{\cos d} \quad \Rightarrow \quad a + e \approx 64,5862^\circ$$

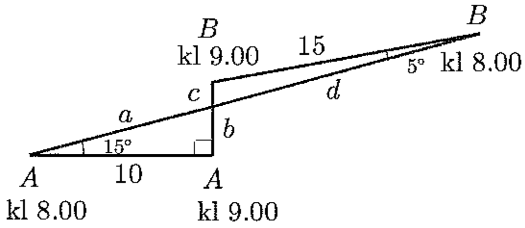
så vi har $e \approx 14,5862^\circ$. Hela sträckan är då $60d \approx 2295$M plus $60e \approx 875$M, dvs **3105 M.**

(c) Vi söker den stora vinkeln vid A, låt oss kalla den α. Sfäriska cosinussatsen är säkrast (sinussatsen går också bra, här förstår vi att α måste vara spetsig):

$$\cos \alpha = \frac{\cos(a+e) - \cos b \cos d}{\sin b \sin d}$$

Detta ger oss $\alpha \approx \mathbf{74,0^\circ}$, vilket också är den efterfrågade kursen.

8. Figuren nedan visar de olika sträckorna som behöver beräknas. Vi söker avstånden mellan fartygen, kl 8.00 är avståndet $a+d$ och kl 9.00 är det $b+c$ med figurens beteckningar. De tillryggalagda sträckorna med respektive fart är 10 M och 15 M, vilket också är markerat i figuren. De markerade vinklarna får man ur givna uppgifter om kurser och bäringar. Triangelvinklarna där de två trianglarna möts måste båda vara 75°.



Trigonometri i den vänstra rätvinkliga triangeln ger oss direkt $a = \dfrac{10}{\cos 15^\circ}$ och $b = 10 \tan 15^\circ$. Sinussatsen i den högra triangeln ger

$$\frac{c}{\sin 5^\circ} = \frac{d}{\sin 100^\circ} = \frac{15}{\sin 75^\circ} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{15 \sin 5^\circ}{\sin 75^\circ}, \; d = \frac{15 \sin 100^\circ}{\sin 75^\circ}$$

Räknaren: $a+d \approx 25,65,\ b+c \approx 4,03$, så avståndet kl 8.00 var **26 M** och kl 9.00 var det **4,0 M**.