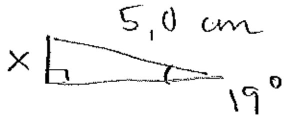
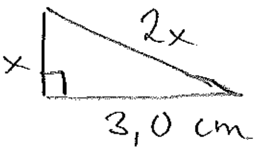
Lösningar till tenta i LNC022/SJM001

Elin Görmark, 18/8 2017.

1. a. 

Sidan som står mot 19° är den minsta, eftersom 19° är den minsta vinkeln.

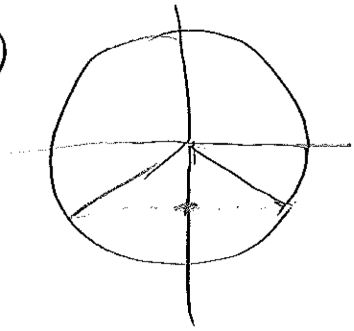
$\frac{x}{5} = \sin(19°)$. $\quad x = 5 \cdot \sin(19°) \approx \underline{\underline{1,6 \text{ cm}}}$

b. 

Pythagoras sats: $x^2 + 3^2 = (2x)^2$

$x^2 + 9 = 4x^2 \qquad 3x^2 = 9 \qquad x^2 = 3$

$x = \sqrt{3} \approx \underline{\underline{1,7 \text{ cm}}} \qquad 2x = 2\sqrt{3} \approx \underline{\underline{3,5 \text{ cm}}}$

c. 

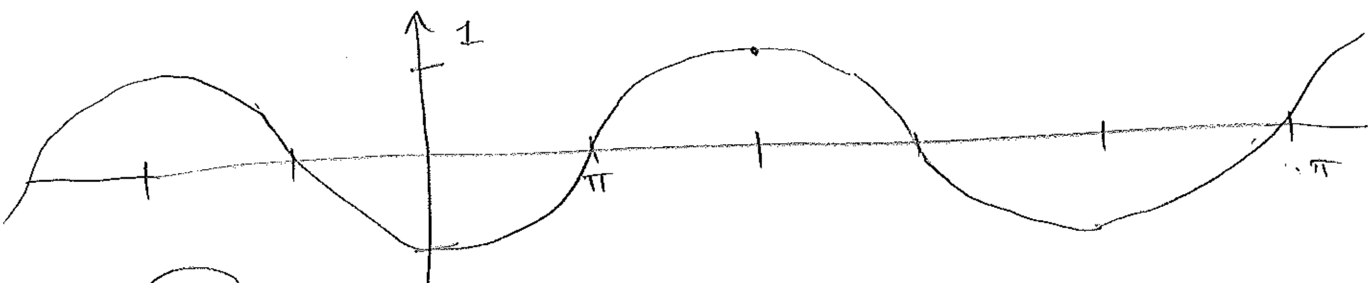
$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -30°$

Ena vinkeln är $360° - 30° = \underline{\underline{330°}}$

och den andra är $180° + 30° = \underline{\underline{210°}}$

$\cos(210°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ och $\cos(330°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d. Sätt $\frac{x}{2} - \pi = 0 \Leftrightarrow x = 2\pi$. Då vet vi att funktionen har värdet 1 här. Faktorn $\frac{1}{2}$ betyder att perioden blir dubbelt så lång, dvs 4π



2. a. $(1,-2,-1) \cdot (3,1,1) = 3 - 2 - 1 = 0$, så dessa är vinkelräta.

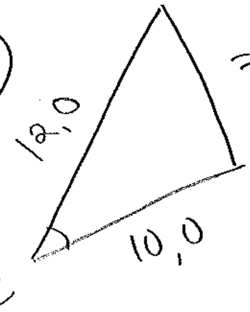
b. Vinkeln mellan $(1,-2,-1)$ och $(2,5,-1)$ ges av:

$$\cos(\theta) = \frac{(1,-2,-1)\cdot(2,5,-1)}{|(1,-2,-1)| \cdot |(2,5,-1)|} = \frac{2 - 10 + 1}{\sqrt{1^2+2^2+1^2} \cdot \sqrt{2^2+5^2+1^2}} =$$

$$= \frac{-7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{30}} = \frac{-7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}} = \frac{-7}{6\sqrt{5}}$$

Så $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{7}{6\sqrt{5}}\right) \approx 121^\circ$

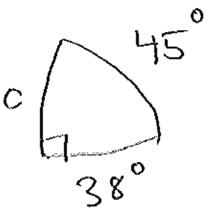
(c) Vektorn ges av $\vec{v}-\vec{u} = (3,1,1)-(1,-2,-1) =$
$= (2,3,2)$. $\quad |(2,3,2)| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$

3. 

För att använda areasatsen måste vi först ta fram en vinkel mha cosinussatsen.

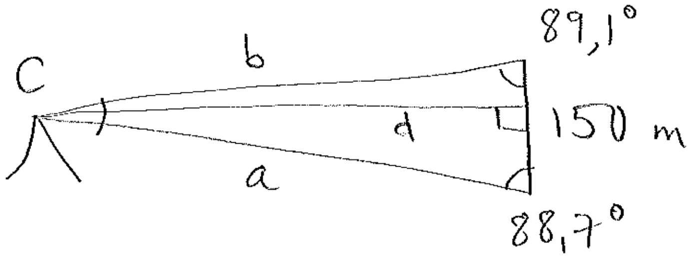
$$\cos(C) = \frac{12^2+10^2-7^2}{2\cdot 12\cdot 10} = \frac{195}{240} = \frac{13}{16}$$

$C = \cos^{-1}\left(\frac{13}{16}\right)$. $\quad$ Arean $= \frac{1}{2}\,12\cdot 10\cdot\sin(C) \approx 35\ \text{cm}^2$

4. 

Eftersom $A = 90^\circ$ är $\cos(a) = \cos(b)\cos(c)$

Så $c = \cos^{-1}\left(\frac{\cos(45^\circ)}{\cos(38^\circ)}\right) \approx 26^\circ$

5. a. 

$C = 180^\circ - 89{,}1^\circ - 88{,}7^\circ =$
$= 2{,}2^\circ$

Sinussatsen ger a och b: $\quad \frac{a}{\sin(89{,}1^\circ)} = \frac{150}{\sin(2{,}2^\circ)}$

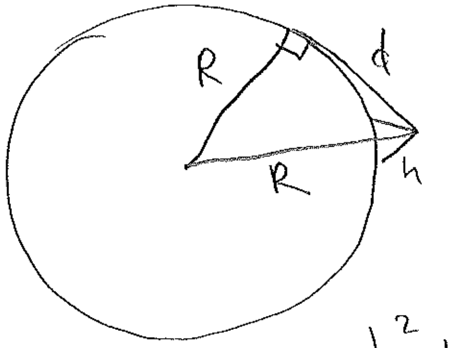
$a = \frac{\sin(89{,}1^\circ)\cdot 150}{\sin(2{,}2^\circ)}$ $\quad (\approx 3907\ \text{m})$

$\frac{b}{\sin(88{,}7^\circ)} = \frac{150}{\sin(2{,}2^\circ)}$ $\qquad b = \frac{\sin(88{,}7^\circ)\cdot 150}{\sin(2{,}2^\circ)}$ $\quad (\approx 3906\ \text{m})$

Nu får vi avståndet d genom $\frac{d}{a} = \sin(88{,}7^\circ)$

$d = a\cdot\sin(88{,}7^\circ) \approx 3910\ \text{m}$ $\qquad$ (om 150 m är givet med tre värdesiffror)

(b.)



Antag att dina ögon är vid havsnivån.

$R = 6371$ km, $d = 3{,}91$ km

h = bergets höjd.

$$d^2 + R^2 = (R+h)^2 = R^2 + 2Rh + h^2$$

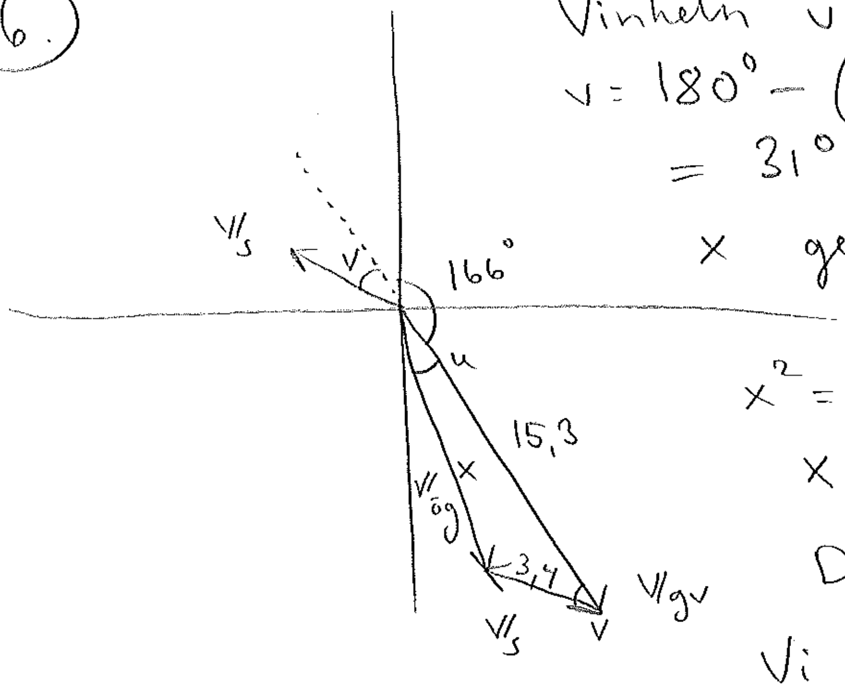
Så $h^2 + 2Rh - d^2 = 0$

$$h^2 + 12742 \cdot h - 15{,}2881 = 0$$

pq-formeln ger: $h = -6371 \pm \sqrt{6371^2 + 15{,}2881}$

$= -6371 \pm 6371{,}0012$. Svaret är rimligtvis inte negativt; så det räcker alltså att "berget" är $0{,}012$ km $= \underline{12 \text{ m}}$ högt, men det kan förstås också vara mycket högre.

(6.)



Vinkeln v ges av

$$v = 180^\circ - (315^\circ - 166^\circ) = 31^\circ$$

x ges nu av cosinussatsen:

$$x^2 = 15{,}3^2 + 3{,}4^2 - 2 \cdot 15{,}3 \cdot 3{,}4 \cdot \cos(31)$$

$x \approx \underline{13 \text{ knop}}$

Detta är farten över grund.

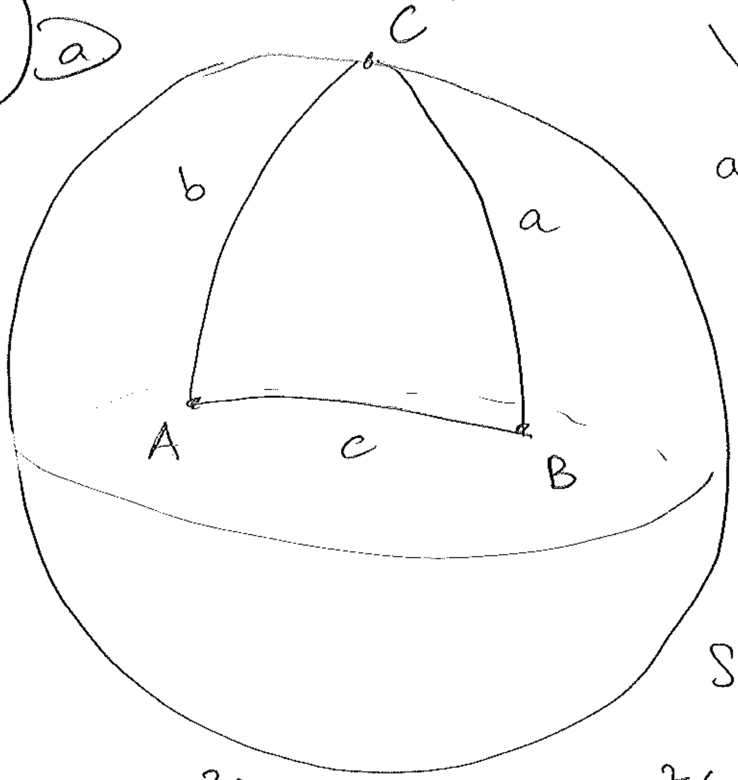
Vi vill också ha kursen.

u ges av sinussatsen:

$$\frac{\sin(u)}{3{,}4} = \frac{\sin(31^\circ)}{x} \Rightarrow u = \sin^{-1}\left(\frac{3{,}4 \cdot \sin(31^\circ)}{x}\right) \approx 8^\circ.$$

Så kursen över grund är $166^\circ + 8^\circ = \underline{174^\circ}$

7. a)



Vi vill veta c.

$a = b = 90° - 18°53' =$
$= 71°7'$

$C = 155°41' - 110°58' =$
$= 154°101' - 110°58' =$
$= 44°43'$

Sfäriska cosinussatsen ger

$$\cos(c) = \cos^2\left(71 + \frac{7}{60}\right) + \sin^2\left(71 + \frac{7}{60}\right)\cos\left(44 + \frac{43}{60}\right)$$

$$c \approx 42{,}19° = 42{,}19 \cdot 60 \text{ M} = \underline{\underline{2531 \text{ M}}}$$

b.) Vi söker A. Sfäriska sinussatsen ger

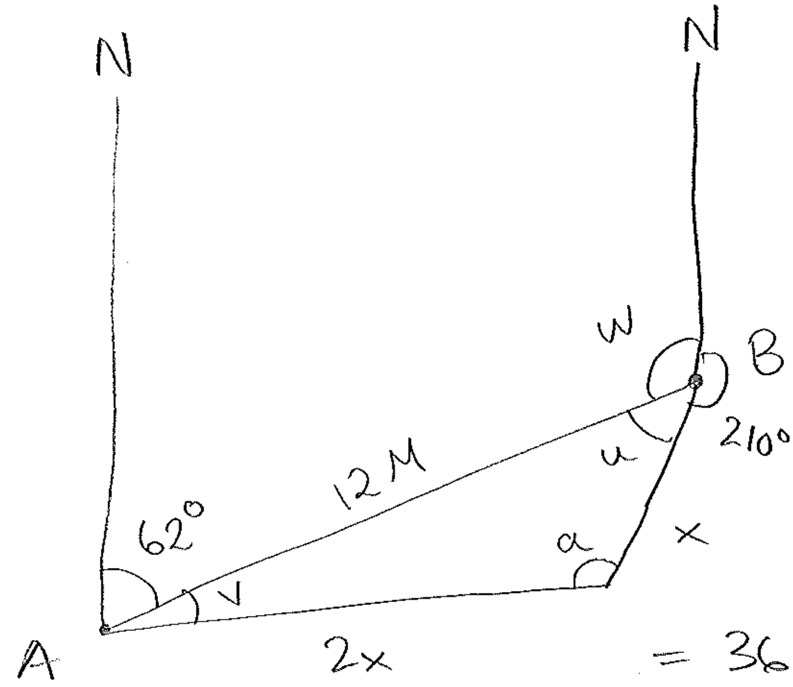
$$\frac{\sin(A)}{\sin(a)} = \frac{\sin(C)}{\sin(c)} \Rightarrow \sin(A) = \frac{\sin(a) \cdot \sin(C)}{\sin(c)}$$

$A = 82{,}4173\ldots \qquad 0{,}4173\ldots \cdot 60 = 25{,}04\ldots$

Så $A \approx \underline{\underline{82°25'}}$.

c.) Hade det varit på ekvatorn hade avståndet varit $\left(44 + \frac{43}{60}\right) \cdot 60 \text{ M} = 2683 \text{ M}$.
Eftersom det är på latitud $18°53'$ blir avståndet istället $2683 \cdot \cos\left(18 + \frac{53}{60}\right) \approx \underline{\underline{2539 \text{ M}}}$
(vilket är längre än längs storcirkeln).

8.



Vi söker v och x.

Vi ser att $w = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$

Då är $u = 360^\circ - 210^\circ - 118^\circ = 32^\circ$

Sinussaben ger $\frac{\sin(v)}{x} = \frac{\sin(32^\circ)}{2x} \Rightarrow$

$\sin(v) = \frac{\sin(32^\circ)}{2}$. $v = 15,36...^\circ$

Då är A:s kurs $62^\circ + v \approx \underline{\underline{77^\circ}}$

Vi får $a = 180^\circ - 32^\circ - v = 132,63...^\circ$

Sinussaben ger $\frac{x}{\sin(v)} = \frac{12}{\sin(a)} \Rightarrow$

$x = \frac{12\sin(v)}{\sin(a)} \approx 4,32...$, så avståndet

som A åker är $2x \approx \underline{\underline{8,6\ M}}$