CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

NAUTISK MATEMATIK

Kursmaterial för Nautisk matematik, LNC022

Detta material är en sammanställning från lite olika källor. Kapitel 1 och 2 utgör början av textboken till webkursen Sommarmatte, del 1, utarbetad av Matematiska Vetenskaper vid Chalmers och Göteborgs Universitet. Kapitel 3 har lånat delar ur Sommarmattens kapitel 3, men är till stora delar skrivet för denna kurs. Kapitel 4 bygger på delar av kompendiet Vektoralgebra av Hasse Carlsson, Matematiska Vetenskaper vid Chalmers och GU. Kapitlet är något omarbetat, och ett avsnitt om strömtriangeln har tillkommit. Kapitel 5 slutligen, är helt nyskrivet för denna kurs.
Kapitel 1 och 2 är i denna kurs avsedda för repetition av gymnasiekunskaper.
I Appendix finns några bevis av satser som förekommer i kursen.

Mars 2015
Lennart Falk
Matematiska Vetenskaper
Chalmers och Göteborgs Universitet

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

Appendix

Facit till övningsuppgifter

1. Aritmetik och algebra

I detta kapitel skall vi först arbeta med grundläggande aritmetik, alltså de fyra räknesätten, för olika typer av tal. I den senare delen av kapitlet behandlas hantering av algebraiska uttryck.

Vi rekommenderar att du *inte* använder räknare eller formelsamling då du löser uppgifterna. De kunskaper du får genom att dels räkna själv och tänka på vilka räkneregler du använder, och dels lära dig en del fakta istället för att förlita dig på formelsamlingen, är oerhört värdefulla för dina fortsatta studier. I många matematikintensiva utbildningar förväntas du klara dig utan hjälpmedel.

1.1. Räkning med naturliga tal och heltal

De *naturliga talen* är talen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. (De tre avslutande punkterna i listan indikerar att mönstret fortsätter utan slut.) De *negativa heltalen* är $-1, -2, -3, -4, \ldots$. Ibland skriver man negativa tal med en parentes: $(-1), (-2), (-3), (-4), \ldots$.

De naturliga talen och de negativa talen bildar tillsammans *heltalen*

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

Ett viktigt ord i det matematiska språket är begreppet *mängd*. I normalsvenska betyder ordet *ett stort antal* eller *en mätbar ansamling*. I matematik är en mängd en samling objekt, *element*. Så har t ex *mängden av de naturliga talen* varje naturligt tal som element. Talet 13 är ett element i mängden, liksom varje annat naturligt tal. Mängden av alla naturliga tal betecknas ofta $\mathbb{N}$. Med symboler skriver vi att 13 är ett naturligt tal som $13 \in \mathbb{N}$. Det faktum att -1 inte är ett naturligt tal skrivs $-1 \notin \mathbb{N}$.

På samma sätt talar man om mängden av alla heltal $\mathbb{Z}$, mängden av alla negativa heltal $\mathbb{Z}_-$ och mängden av alla positiva heltal $\mathbb{Z}_+$. Talet 0 är varken positivt eller negativt.

Om varje element i en mängd A också är element i en annan mängd B så säger vi att A är en *delmängd* till B vilket skrivs $A \subset B$. Vi har t ex att $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, eftersom varje naturligt tal även är ett heltal..

1.1.1. Naturliga tal

Två naturliga tal kan *adderas*, vilket av alla uppfattas som närmast självklart. Det faktum att termerna kan byta plats med varandra utan att resultatet ändras, d v s att operationen addition är *kommutativ*, ($a + b = b + a$ för alla naturliga tal a och b), är också något så självklart att man sällan eller aldrig reflekterar över det. Operationen är bara definierad för par av tal. Vid addition av fler än två tal måste man därför i princip markera den ordning additionerna skall utföras i med parenteser, så

$$3 + (6 + 13) = 3 + 19 = 22 \text{ och } (3 + 6) + 13 = 9 + 13 = 22.$$

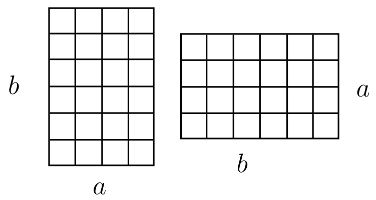
Vi vet dock att det, precis som i exemplet ovan, inte spelar någon roll hur vi sätter parenteserna. Summan av talen 3, 6 och 13 är 22 i vilken ordning vi än räknar. Allmänt gäller att $a+(b+c)=(a+b)+c$ för alla naturliga tal a, b och c, och vi säger att additionen är *associativ*. Om inga parenteser skrivits ut gäller *läsriktningsprioritet*, d v s additionerna utförs från vänster till höger. Uttrycket $3+6+13+5$ tolkas alltså som $((3+6)+13)+5$.

Talen som adderas kallas *termer* och resultatet av additionen kallas *summa*.

Multiplikation av naturliga tal är upprepad addition, så t ex

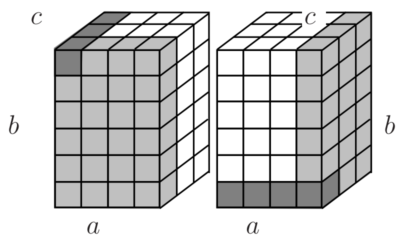
$$6\cdot 7=7+7+7+7+7+7=42.$$

Även multiplikation är som bekant kommutativ, d v s $a\cdot b=b\cdot a$ för alla naturliga tal a och b. Detta är inte lika uppenbart[1] som för addition. Kommutativiteten är självklar om man föreställer sig en inrutad rektangel med a rutor i ena riktningen och b rutor i den andra. Det totala antalet rutor t är oberoende av ordningen i vilken man räknar dem, och man får att $t=a\cdot b$, alternativt $t=b\cdot a$, beroende på vilken sida man utgår ifrån.



Figur 1: *ab=ba*

Multiplikationen är också associativ, d v s $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$, för alla naturliga tal a, b och c. Ett rätblock med sidorna a, b och c kan användas för att inse detta.



Figur 2: $(ab)c=a(bc)$

Talen som multipliceras kallas *faktorer* och resultatet av multiplikationen kallas *produkt*.

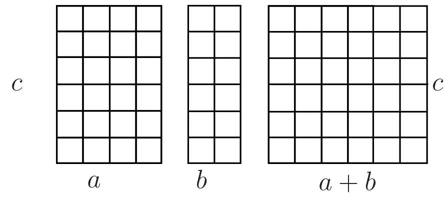
Sammantaget behöver man varken bry sig om ordning eller parenteser när man bara har en av operationerna addition eller multiplikation. Då både addition och multiplikation är inblandade, som i beräkningen av $3+4\cdot 7$, kommer prioritetsregeln *multiplikation före addition* in, så att $3+4\cdot 7=3+28=31$. Här gäller alltså *inte* läsriktningsprioritet. Vill vi att additionen skall utföras först måste vi markera det med parenteser: $(3+4)\cdot 7=7\cdot 7=49$. Denna uträkning kan också göras med *distribution* som $(3+4)\cdot 7=3\cdot 7+4\cdot 7=21+28=49$. Allmänt gäller vid addition följt av multiplikation den *distributiva lagen*:

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c,$$

för alla naturliga tal a, b och c. Detta övertygar man sig om genom att ta två rektanglar som består av $a\cdot c$ respektive $b\cdot c$ rutor och lägga dem bredvid varandra.

[1] Att 5 påsar med 3 kolor i varje och 3 påsar med 5 kolor i varje är lika mycket härligt godis är inte uppenbart för ett litet barn.

Om $a, b \in \mathbb{N}$ så säger vi att a är större än b, vi skriver $a > b$, om det finns $c \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$, sådant att $a = b + c$. Vi säger att b är mindre än a och skriver $b < a$, om $a > b$. Detta stämmer överens med den intuitiva uppfattningen om jämförelse mellan tal ("a är större än b om a är lika med b plus lite till"). Vi säger att a är större än eller lika med b, $a \geq b$, om $a > b$ eller $a = b$, d v s om det finns $c \in \mathbb{N}$ sådant att $a = b + c$. (Notera att $a \geq a$, medan $a \not> a$, d v s a är större än eller lika med a, men a är inte större än a.) För $a \geq b$ definierar vi *subtraktion* av a med b, $a - b = c$, där c är samma som ovan, d v s



Figur 3: $(a+b)c = ac + bc$

$$a - b = c, \text{ om } a = b + c.$$

I fallet $a < b$ finns inget $c \in \mathbb{N}$ sådant att $a = b + c$. Subtraktion i det fallet kräver att man lämnar de naturliga talen. Frågan diskuteras i nästa avsnitt.

Division är i någon mening den motsatta operationen till multiplikation, d v s eftersom $6 \cdot 7 = 42$ så är $\frac{42}{7} = 6$. I det här avsnittet handlar det endast om division av naturliga tal. Multiplikation av naturliga tal är som vi nämnde tidigare samma som upprepad addition och division är därför upprepad subtraktion. Vi får alltså $\frac{42}{7} = 6$ *eftersom* $42 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 = 0$. (De gamla mekaniska räknemaskinerna byggde helt på denna princip.) Förutom vanligt bråkstreck använder vi i texten ibland $\div$ som divisionstecken[2]. Antalet gånger man kan utföra subtraktionen kallas *kvot*. Om man så småningom, som i exemplet ovan, kommer till 0, säger man att divisionen går jämnt ut. Om divisionen inte går jämnt ut får man en *rest*, d v s ett tal som inte är 0, men som är för litet för att man ska kunna subtrahera vidare. T ex får vi

$$45 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 = 3,$$

d v s $\frac{45}{7} = 6 + \frac{3}{7}$.

Vid division av 45 med 7 får man alltså kvoten 6 och resten 3.

Att man vid division av n med m får kvot q och rest r, är samma sak som att n kan skrivas som $n = mq + r$, där resten r är ett naturligt tal mindre än m, d v s $0 \leq r < m$. I exemplet ovan har vi att $45 = 7 \cdot 6 + 3$.

Det är värdefullt att kunna utföra så kallad lång division av naturliga tal för hand, inte minst för att underlätta polynomdivision längre fram. Algoritmen man använder är alltid densamma, men uppställningen kan variera, t ex ”liggande stolen” eller ”trappan”. Vilken man väljer är helt oviktigt. Här nedan används ”liggande stolen”. Schematiskt ser den ut så här:

[2]Det finns många tecken som används för att beteckna division, $\div$, : , /, eller ett vanligt bråkstreck.

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{\textbf{Kvot}} \\ \hline \textbf{Täljare} & \textbf{Nämnare} \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Exempel. Vi önskar beräkna $8476 \div 23$.

Lösning. För att det skall vara enklare att följa kalkylerna redovisas varje steg i en ny ”stol”. En förklaring ges efter exemplet.

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{\textbf{Kvot}} \\ \hline 8476 & 23 \\ \cline{2-2} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\ \ 3} \\ \hline 8476 & 23 \\ \cline{2-2} \underline{-69} & \\ 15 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\ \ 36} \\ \hline 8476 & 23 \\ \cline{2-2} \underline{-69} & \\ 157 & \\ \underline{-138} & \\ 19 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\ \ 368} \\ \hline 8476 & 23 \\ \cline{2-2} \underline{-69} & \\ 157 & \\ \underline{-138} & \\ 196 & \\ \underline{-184} & \\ 12 & \textbf{Rest} \end{array}$$

Vi ser här att $8476 \div 23 = 368$ med rest 12, d v s $8476 \div 23 = 368 + 12 \div 23$, eller, som vi är mer vana vid att skriva, $\frac{8476}{23} = 368 + \frac{12}{23}$. Vi kan också skriva om resultatet utan något divisionstecken som $8476 = 23 \cdot 368 + 12$. $\square$

Om du tycker att algoritmen är svårbegriplig eller krånglig kan du kanske ha hjälp av följande förklaring:

Det är väldigt opraktiskt att subtrahera talet 23 från talet 8476 mer än 300 gånger. Därför effektiviserar man genom att först räkna ut hur många hundra gånger 23 går i 8476. Eftersom $84 \div 23 = 3$ med rest 15 går 23 minst 300 gånger i 8476, men inte 400 gånger. Vi kan därmed skriva hundratalssiffran 3 i kvoten och subtrahera $300 \cdot 23$ från 8476.

Vi har att $84 - 3 \cdot 23 = 15$ och $8476 - 300 \cdot 23 = 1500 + 76 = 1576$. I den andra ”stolen” är inte nollorna utskrivna, de är underförstådda. I den tredje stolen tas inte siffran 6 med i resten 1576. Det betyder inget, men man brukar göra så eftersom den inte kommer in i kalkylerna i detta steg.

I tredje stolen får vi $157 \div 23 = 6$ med rest 19. Alltså går 23 minst 60 gånger i 1576, men inte 70 gånger. Vi får $157 - 6 \cdot 23 = 19$ och $1576 - 60 \cdot 23 = 190 + 6 = 196$. Vi kan nu skriva tiotalssiffran 6 i kvoten.

Slutligen får vi $196 \div 23 = 8$ med rest 12. Alltså är $196 = 8 \cdot 23 + 12$ och kvotens entalssiffra är 8. Kalkylerna ovan kan sammanföras som

$$\begin{aligned} 8476 &= 300 \cdot 23 + 1576 = 300 \cdot 23 + 60 \cdot 23 + 196 = 360 \cdot 23 + 196 \\ &= 360 \cdot 23 + 8 \cdot 23 + 12 = 368 \cdot 23 + 12. \end{aligned}$$

Alltså $8476 \div 23 = 368$ med rest 12, eller $\frac{8476}{23} = 368 + \frac{12}{23}$.

Fallet då divisionen $a \div b$ går jämnt ut, alltså fallet $r = 0$, är speciellt intressant. I detta fall är $a = b \cdot c$ där c också är ett naturligt tal. Talet a är alltså produkten av de två faktorerna b och c. Det finns många synonymer för detta. Om divisionen $a \div b$ går jämnt ut så säger man att

- a är *delbart med* b, eller
- a *delas av* b, eller
- b *delar* a, eller
- b är *divisor till* a, eller
- b är *delare till* a, eller
- b är en *faktor i* a, eller
- a är en *multipel* av b.

T ex har vi att $8464 \div 23 = 368$ med rest 0. Detta innebär att $8464 \div 23 = 368$ så med andra ord är 8464 *delbart med* 23 och 23 en *faktor i* 8464.

Eftersom $a = 1 \cdot a$, så har a alltid delarna a och 1 (1 är med andra ord delare till alla tal). Om b är delare till a där $b \neq 1$ och $b \neq a$ så kallas b *äkta delare* till a.

Definition: Tal som är större än 1 och som saknar äkta delare kallas *primtal*. Tal som har äkta delare kallas *sammansatta tal*. Talet 1 är en enhet och kallas varken primtal eller sammansatt tal.

Alla tal som är delbara med två kallas *jämna*, övriga naturliga tal kallas *udda*. Att ett tal n är jämnt betyder att det ger rest 0 vid division med 2, d v s $n = 2k$ för något naturligt tal k. Att n är udda betyder att det ger rest 1 vid division med 2 (den enda möjliga resten förutom 0), d v s $n = 2k + 1$ för något naturligt tal k.

De fem minsta primtalen är 2, 3, 5, 7 och 11. Alla jämna tal större än 2 har ju 2 som en äkta delare, så primtal större än 2 måste därför vara udda tal.

Talet 15 kan skrivas som produkt av primtalen 3 och 5, $15 = 3 \cdot 5$, och 15 har alltså 3 och 5 som äkta delare. I denna produkt kan faktorernas ordning varieras, d v s $15 = 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$. Bortsett från det är faktoruppdelningen unik. För att övertyga oss om detta i det konkreta fallet kan vi resonera som följer: Om $15 = a \cdot b$, där a och b är naturliga tal större än 1, så är både a och b mindre än 15. Nu kan vi antingen testa alla möjliga produkter av tal mellan 1 och 15, eller också reducera antalet försök genom att inse att $4 \cdot 4 > 15$ och att minst ett av talen a och b därför måste vara mindre än 4. Vi ser då lätt att enda möjligheten att skriva 15 som produkt av primtal, om vi bortser från ordningen, är $15 = 3 \cdot 5$.

Resonemanget ovan om möjliga faktorer gäller generellt: Om talet c inte är ett primtal så har c en primtalsfaktor $p,\ 1 < p \leq \sqrt{c}$. Det är alltså relativt enkelt att avgöra om ett visst tal är ett primtal under förutsättning att talet inte är särskilt stort. Tag som exempel talet 97. Om 97 inte är ett primtal så har det en primtalsfaktor p som uppfyller

$$p \leq \sqrt{97} < \sqrt{100} = 10.$$

Det räcker då att konstatera att 97 inte finns i någon av ”multiplikationstabellerna” för primtal mindre än 10 för att dra slutsatsen att 97 är ett primtal.

För stora tal är det däremot tidsödande att avgöra om talet är ett primtal eller ej på detta sätt, till och med om det är ett datorprogram som genomför undersökningen. Det finns dock mer sofistikerade och snabbare sätt att undersöka riktigt stora tal om man har tillgång till en dator.

Det faktum att 15 bara kunde faktoriseras i primtalsfaktorer på ett enda sätt gäller generellt. Redan under antiken bevisade Euklides i Elementa (bok 9) följande centrala sats om uppdelning i primtalsfaktorer.

Aritmetikens fundamentalsats: *Varje naturligt tal som är större än* 1 *kan skrivas som en produkt av primtal. Bortsett från ordningsföljden är primtalsfaktorerna entydigt bestämda. (Här utvidgar vi begreppet* produkt *något och kallar även ett ensamt primtal för en produkt av primtal.)*

Som exempel på hur man kommer fram till en primtalsfaktorisering ska vi skriva talet 8464 som en produkt av primtalsfaktorer. Vi vet redan att $8464 = 23 \cdot 368$, men här agerar vi som om vi inte visste det. Talet är jämnt, så vi kan skriva $8464 = 2 \cdot 4232$. Nu ska 4232 faktoriseras; det är också ett jämnt tal. Vi fortsätter bryta ut tvåor så länge det går och får $8464 = 2 \cdot 4232 = 2 \cdot 2 \cdot 2116 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1058 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 529$. Talet 529 är udda, så vi får nu leta efter primtalsfaktorer större än två. Undesökning visar att 529 inte är delbart med vare sig $3, 5, 7, 11, 13, 17$ eller 19, men väl med 23, $529 = 23 \cdot 23$, och vi får slutligen

$$8464 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 23 = 2^4 \cdot 23^2,$$

en produkt av primtal. (Här använder vi potenser med heltalsexponenter som ett kort skrivsätt för upprepad multiplikation av ett tal med sig självt, $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$. Potensräkning diskuteras ingående senare i kursen.)

Ett bevis för att varje tal kan skrivas som en produkt av primtal bygger på att ett tal som inte är ett primtal kan skrivas som produkt av två mindre tal. Antingen är dessa primtal, eller så kan de skrivas som produkt av ännu mindre tal, vilka i sin tur antingen är primtal eller kan skrivas som produkt av ännu mindre tal o s v. Processen är ändlig, eftersom mängden av naturliga tal, skilda från noll, har ett minsta element, nämligen 1. Vi avstår här från att visa att faktorerna är entydigt bestämda, vilket är betydligt knivigare.

En annan av Euklides viktiga satser är:

Sats: Det finns oändligt många primtal.

Bevis. Antag motsatsen, d v s antag att det bara finns ändligt många primtal, $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Bilda produkten M av alla dessa och lägg till 1. Enligt aritmetikens fundamentalsats måste då $M+1 = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$ vara en produkt av primtal, men det är inte möjligt eftersom talet ger rest 1 vid division med vilket primtal p_k som helst. Motsägelsen visar att vårt antagande om att primtalen är ändligt många är felaktigt, alltså finns det oändligt många primtal. □

En lista över alla primtal skulle alltså bli oändligt lång, men man kan naturligtvis ge en ändlig lista över alla primtal upp till ett visst tal. Denna lista kan sedan användas vid primtalsfaktorisering av större tal. Vill man på ett systematiskt sätt plocka fram alla primtal upp till ett givet tal kan man använda *Erathostenes primtalssåll* från ca 230 fvt. Detta beskrivs i många läroböcker och kan säkert hittas på Internet. Idén är att utgå från alla naturliga tal från 2 t o m den önskade övre gränsen. Successivt stryker man alla äkta multipler av primtalen med början från 2, sedan 3, 5 o s v. Det minsta överhoppade talet som är större än de hittills funna primtalen måste vara nästa primtal i listan. Då man strukit multiplerna av 2, 3 och 5 är minsta överhoppade talet 7, därefter 11 o s v.

Testövning

1. Bestäm kvot och rest vid division av 937 med 31.
2. Bestäm kvot och rest vid division av 427 med 23.

Svar:

1. kvot 30 och rest 7, d v s $937 = 31 \cdot 30 + 7$
2. kvot 18 och rest 13, d v s $427 = 23 \cdot 18 + 13$

1.1.2. Negativa tal

De naturliga talen och additionen av sådana är direkt sammankopplade med antalsräkning och därmed något som även mycket små barn förstår. Eftersom de övriga räknesätten för naturliga tal bygger på addition, så finns det en lättbegriplig tolkning också för dessa. Namnet “naturliga” speglar just det sätt på vilket vi uppfattar talen i $\mathbb{N}$ och deras egenskaper. Då det gäller negativa heltal är situationen lite annorlunda, även om också dessa har naturliga tolkningar. Vi är sedan barnsben vana vid minusgrader på vintern och vet att om det är fem grader varmt ($+5^\circ$) och temperaturen sjunker tio grader, så blir det fem grader kallt (-5°). Ett annat begrepp som ofta dyker upp i vardagslivet är “skuld”, om man är skyldig någon 100 kronor behöver man en hundralapp för att nollställa sin ekonomi. Medan begreppet naturliga tal är ett av de begrepp som ligger i grunden för all matematik och som inte definieras, måste man *definiera* de negativa heltalen med hjälp av de naturliga talen. De naturliga talen och de negativa heltalen bildar tillsammans mängden av alla heltal, $\mathbb{Z}$. Man definierar sedan de fyra räknesätten inom den nya talmängden och visar att de har samma egenskaper som räknesätten för naturliga tal (med den väsentliga skillnaden att det i $\mathbb{Z}$ går att subtrahera vilket tal som helst från vilket tal som helst utan att lämna mängden). Vi kommer här dock att nöja oss med den intuitiva uppfattningen om negativa tal illustrerad ovan och repetera hur man räknar med negativa tal utan att ge formella definitioner och bevis.

Vi utgår alltså från att vi, givet det naturliga talet n, har en uppfattning om vad $(-n)$ är, samt att vi vet hur man adderar och subtraherar i $\mathbb{N}$. Om $a, b \in \mathbb{N}$, så gäller

$$
\begin{aligned}
-(-a) &= a \\
(-a)+b &= b-a \quad \text{för} \quad b \geq a, \\
(-a)+b &= -(a-b) \quad \text{för} \quad b < a, \\
(-a)+b &= b+(-a), \\
(-a)+(-b) &= -(a+b) \\
(-a)-b &= (-a)+(-b) \\
a-(-b) &= a+b
\end{aligned}
$$

$$(-a)-(-b) = (-a)+b.$$

Exempel:

$$
\begin{aligned}
3+(-7) &= -(7-3) = -4 \\
(-3)+7 &= 7-3 = 4 \\
(-3)+(-7) &= -(7+3) = -10.
\end{aligned}
$$

Multiplikation definieras som följer

$$
\begin{aligned}
(-a)\cdot b &= b\cdot(-a) = -(a\cdot b), \\
(-a)\cdot(-b) &= a\cdot b,
\end{aligned}
$$

för alla naturliga tal a och b. Den andra likheten ovan är den kända regeln “minus minus är plus”. Detta är en definition och alltså inget som kan härledas. Dock är det så att det inte är slumpen som avgör hur man väljer att definiera en operation. Multiplikation av heltal definieras på ett sätt som garanterar att räknereglerna för naturliga tal fortsätter gälla i $\mathbb{Z}$. Man kan ändå ge en intuitiv förklaring: om man tolkar minustecknet som byte av sida med avssende på 0 på tallinjen, så måste två successiva byten innebära att man hamnar på samma sida nollan som man utgick från. Likaså, om man säljer en skuldsedel resulterar det i att man får intäkter.

Exempel:

$$
\begin{aligned}
4\cdot(-7) &= -(4\cdot 7) = -28 \\
(-4)\cdot(-7) &= 4\cdot 7 = 28.
\end{aligned}
$$

För att illustrera hur man går till väga när man bevisar att de önskade räknereglerna fortfarande gäller visar vi att en trippel av negativa tal uppfyller den distributiva lagen. Vi har nämligen för alla naturliga tal a, b och c att

$$(-a)\cdot((-b)+(-c)) = (-a)\cdot(-(b+c)) = a\cdot(b+c),$$

och

$$(-a)\cdot(-b)+(-a)\cdot(-c) = (a\cdot b)+(a\cdot c) = a\cdot(b+c),$$

där vi i sista likheten utnyttjar den distributiva lagen för naturliga tal. Därmed har vi visat

$$(-a)\cdot((-b)+(-c)) = (-a)\cdot(-b)+(-a)\cdot(-c),$$

som är den distributiva lagen för en trippel negativa tal.

Delbarhet fungerar på samma sätt i $\mathbb{Z}$ som i $\mathbb{N}$. Tal som är delbara med 2 kallas jämna och har formen $n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$, tal som inte är delbara med 2 kallas udda och kan skrivas som $n = 2k \pm 1,\ k \in \mathbb{Z}$ (± 1 betyder att man kan välja mellan $+1$ och -1).

Olikheten $a > b$ för $a, b \in \mathbb{Z}$ definieras på samma sätt som för naturliga a, b, d v s $a > b$ om det finns ett positivt tal c sådant att $a = b + c$. Övriga olikheter definieras analogt.

Testövning

1. Beräkna $5-((-4)-7)$
2. Beräkna $-5\cdot(-4-3)$
3. Beräkna $-5\cdot(-4)-3$

Svar:

1. 16 2. 35 3. 17

1.1.3. Räkneregler

I början av kapitlet diskuterades räknereglerna för naturliga tal. Vi utvidgade sedan talområdet till att även omfatta negativa tal Utvidgningen gjordes på ett sådant sätt att såväl priorits- som räknereglerna fortsatte att gälla. Nedan sammanfattas de prioritetsregler och räkneregler som behandlats i kapitlet. Observera att om a är ett heltal så kan talet $(-a)$ vara negativt (om a är positivt) eller positivt (om a är negativt).

Prioriteringsordning

1. Operation inom parenteser
2. Multiplikation och division
3. Addition och subtraktion
4. Vid lika prioritet gäller läsriktningsprioritet

Räkneregler för heltal

För alla heltal a, b och c gäller det att

- $a + b = b + a$ *kommutativitet*
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ *associativitet*
- $a + 0 = a$ *identitet*
- $a \cdot b = b \cdot a$ *kommutativitet*
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *associativitet*
- $a \cdot 1 = a$ *identitet*
- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ *distributivitet*
- $a + (-a) = 0$
- $a + (-b) = a - b$
- $-(-a) = a$ *minus minus är plus*
- $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ *minus minus är plus*
- $a - (b - c) = a - b + c$ *minus minus är plus*
- $a - (b + c) = a - b - c$

1.1.4. Övningar

1.1.1 Bestäm kvot och rest vid divisionerna nedan. Ange svaret vid divisionen $n \div m$ på formen $n = m \cdot q + r$, där q är kvoten och r är resten.

a) $7956 \div 21$

b) $7497 \div 21$

c) Är något av talen 7956 eller 7497 delbart med 21?

1.1.2 Skriv talen nedan som produkt av primtal.

a) 495

b) 47502

c) -249

1.1.3 Beräkna

a) $7-(-2)\cdot(3-9)\cdot((2+(-5)-8)\cdot(-3-(-5))-4)$

b) $(-4-2)\cdot((-6-(-9))-((6-(-7)+3)\cdot((-2)-3)+(-1)\cdot(7-(-4))))$

1.1.4 Skriv om följande uttryck utan parenteser.

a) $a-(-b)\cdot(a+1)-b\cdot(-a+1)$

b) $((-a)\cdot(-b)+a\cdot(b-2\cdot(-a)))\cdot(-1+b)$

1.1.5 Ordna talen i listorna nedan i stigande ordning.

a) $5, 11, -2, 4$

b) $-a, b, -c, d$, där $a = 19, b = -20, c = -18, d = -100$

1.2. Bråkräkning

När man inför de negativa talen så får uttrycket $a-b$ med $a<b$ mening som ett (negativt) tal. På samma sätt ger man genom att införa *rationella tal* eller *bråktal* mening åt $a \div b$ som ett tal även då resten inte är 0. Både de rationella talen och de fyra räknesätten för dessa definieras på ett sätt som garanterar att räknereglerna som listats tidigare fortfarande gäller.

1.2.1. De rationella talen

Rationella tal eller *bråktal* skrivs $\frac{p}{q}$, där p och q är heltal och $q \neq 0$. Mängden av alla rationella tal betecknas med $\mathbb{Q}$. Utan att ge en formell definition kan vi säga att $\frac{p}{q}$ är det tal som multiplicerat med q ger p. Därmed kan ett heltal p identifieras med det rationella talet $\frac{p}{1}$. Det betyder att alla heltal kan uppfattas som rationella tal. Mängden av alla heltal, $\mathbb{Z}$, är alltså en *delmängd* till mängden av alla rationella tal, d v s $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Talet 0 kan skrivas som $\frac{0}{q}$ för godtycklig nämnare $q \neq 0$. Allmänt gäller att $\frac{p}{q} = 0$ om och endast om $p = 0$. Observera att villkoret $q \neq 0$ fortfarande måste vara uppfyllt!

Ett rationellt tal kan alltid skrivas på (oändligt) många olika sätt, för om $s \neq 0$ är ett heltal så är

$$\frac{p}{q} = \frac{s \cdot p}{s \cdot q}.$$

För att övertyga sig om det ska man inse att om man multiplicerar talet till vänster med högerledets nämnare, så får man precis högerledets täljare:

$$s \cdot q \cdot \frac{p}{q} = s\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = s \cdot p.$$

(Här har vi använt den associativa lagen för en produkt av två heltal och ett rationellt tal.) Man säger att bråktalet $\frac{p}{q}$ *förlängts* med (faktorn) $s \neq 0$ till $\frac{s \cdot p}{s \cdot q}$, eller att $\frac{s \cdot p}{s \cdot q}$ *förkortats* med s till $\frac{p}{q}$. Till exempel är $\frac{7}{11}$ och $\frac{14}{22}$ lika eftersom

$$\frac{7}{11} = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 11} = \frac{14}{22}.$$

I allmänhet försöker man ange bråktal på enklaste formen så att täljaren p och nämnaren q inte har någon gemensam faktor utom ± 1 (sådana tal p och q kallas *relativt prima*). Man säger då att talet är skrivet på *enklaste bråkform*. Ett systematiskt sätt att hitta den enklaste bråkformen är att primtalsfaktorisera täljare och nämnare och förkorta med alla gemensamma primtalsfaktorer. Vi har t ex att

$$\frac{84}{30} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 7}{5} = \frac{14}{5}.$$

Man kan förlänga/förkorta med negativa faktorer också och speciellt kan man alltid se till att nämnaren är positiv:

$$\frac{-7}{-11} = \frac{(-1) \cdot 7}{(-1) \cdot 11} = \frac{7}{11} \quad \text{och} \quad \frac{7}{-11} = \frac{(-1) \cdot 7}{(-1) \cdot (-11)} = \frac{-7}{11}.$$

1.2.2. Räkning med rationella tal

Addition (och subtraktion) av bråktal med *samma nämnare* ges av addition (respektive subtraktion) av täljarna med samma nämnare:

$$\frac{11}{13}+\frac{5}{13}=\frac{11+5}{13}=\frac{16}{13} \quad \text{och} \quad \frac{11}{13}-\frac{5}{13}=\frac{11-5}{13}=\frac{6}{13}.$$

I allmänhet måste termerna skrivas om så att de får samma nämnare innan man kan addera eller subtrahera bråken. Korsvis förlängning av de två nämnarna fungerar alltid:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{d\cdot a}{d\cdot b}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{d\cdot a+b\cdot c}{d\cdot b}.$$

Det är dock en god vana att inte förlänga med mer än nödvändigt, eftersom det är jobbigare att räkna med stora tal och risken att räkna fel ökar. Då man arbetar med rationella funktioner, se avsnitt 4.3, blir detta extra viktigt. För att förlänga med så lite som möjligt letar man upp den den minsta gemensamma nämnaren, d v s den minsta gemensamma multipeln av nämnarna. Ett systematiskt sätt att göra detta är att primtalsfaktorisera nämnarna och leta upp den minsta produkt av primtal som innehåller alla faktorer för nämnarna. Om vi t ex vill räkna ut

$$\frac{7}{12}+\frac{37}{30},$$

där båda talen är på enklaste bråkform, så använder vi att $12=2^2\cdot 3$ och $30=2\cdot 3\cdot 5$. De primtal som ingår är alltså 2 (med potensen 2), 3 och 5. Den minsta möjliga gemensamma nämnaren är alltså $2^2\cdot 3\cdot 5=60$. För att få denna nämnare så får vi förlänga med 5 respektive 2:

$$\frac{7}{12}+\frac{37}{30}=\frac{5\cdot 7}{5\cdot 12}+\frac{2\cdot 37}{2\cdot 30}=\frac{35}{60}+\frac{74}{60}=\frac{109}{60}.$$

Om man slaviskt följer den allmänna principen med korsvis multiplikation får man istället

$$\frac{7}{12}+\frac{37}{30}=\frac{30\cdot 7}{30\cdot 12}+\frac{12\cdot 37}{12\cdot 30}=\frac{210}{360}+\frac{444}{360}=\frac{654}{360}=\frac{109}{60},$$

vilket ger jobbigare räkningar.

Oavsett hur man väljer att utföra beräkningarna ska man i svaret alltid ange resultatets enklaste bråkform.

Subtraktion av bråktal görs på motsvarande sätt som addition:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{d\cdot a-b\cdot c}{d\cdot b},$$

Här, som för addition, bör man hitta den minsta gemensamma nämnaren

$$\frac{7}{12}-\frac{39}{15}=\frac{5\cdot 7}{5\cdot 12}-\frac{4\cdot 39}{4\cdot 15}=\frac{35}{60}-\frac{156}{60}=\frac{35-156}{60}=\frac{-121}{60}=-\frac{121}{60}.$$

Här hade vi $12 = 2^2 \cdot 3$ och $15 = 3 \cdot 5$, och minsta gemensamma nämnaren var alltså åter $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Multiplikation av rationella tal ska definieras så att räknelagarna för heltalsmultiplikation fortfarande gäller. Det betyder att:

- Multiplikation med heltal skall motsvara upprepad addition. Alltså gäller t ex

$$n \cdot \frac{c}{d} = \underbrace{\frac{c}{d} + \frac{c}{d} + \cdots + \frac{c}{d}}_{n \text{ termer}} = \frac{n \cdot c}{d}.$$

- Vidare skall multiplikation vara associativ. Alltså gäller

$$\frac{c}{d} = 1 \cdot \frac{c}{d} = \frac{n}{n} \cdot \frac{c}{d} = \left(n \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{c}{d} = n \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{c}{d}\right).$$

  Men detta är möjligt endast om

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{n \cdot d}.$$

- Sammantaget ger detta

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = a \cdot \frac{c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Vi fick alltså att den enda rimliga definitionen för multiplikation av rationella tal är

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Division av rationella tal ges av

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Detta motiveras av att kvoten $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d}$ måste vara ett tal A sådant att $A \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, och vi ser att $A = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ är det tal som uppfyller kravet, eftersom

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b}.$$

Bråket $\frac{q}{p}$ kallas ibland för *det inverterade bråket* till $\frac{p}{q}$ (här förutsätts att $p, q \neq 0$). Vi skulle då kunna säga att man dividerar ett bråk med ett annat genom att multiplicera det första med det inverterade till det andra.

Vid närmare eftertanke är detta intuitivt självklart. Om man har en tolvbitarstårta och alla ska få en bit var så räcker den till tolv personer, men om man bara ger en halv bit till var och en så kan dubbelt så många få, alltså

$$\frac{12}{\frac{1}{2}} = 12 \cdot 2 = 24.$$

I kapitel 1.1.1 då vi räknade med enbart heltal skulle vi sagt att $13 \div 4$ ger kvoten 3 och resten 1, medan vi nu kallar $\frac{13}{4}$ kvot. Då handlade det om *heltalsdivision* som speglar t ex en fördelning: *om tretton ägg skall fördelas på kartonger som rymmer fyra ägg vardera så får man tre fulla kartonger och ett ägg över.* I detta kapitel handlar det om division för rationella tal. Alla rationella tal kan divideras, kvoten är alltid ett rationellt tal.

Ibland kan användningen av bråkstreck som divisionssymbol bli anledning till felläsning/feltolkning:

Vi har att $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b} \div c = \dfrac{a}{b \cdot c}$ men $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a \div \dfrac{b}{c} = \dfrac{a \cdot c}{b}$. Därför är det viktigt att veta vad som avses då man använder ”dubbelbråk”. Att $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ och $\dfrac{a}{\frac{b}{c}}$ inte är samma sak, syns lätt i tryckt text, men inte lika lätt i handskriven text. Speciellt viktigt är det att skriva likhetstecknet på rätt nivå.

Tänk också på att ett dubbelbråk ofta innehåller ”osynliga parenteser”, vilket illustreras i nästa exempel.

Exempel. Vi skall skriva $\dfrac{\frac{1}{7} - \frac{3}{11}}{\frac{2}{63} + \frac{11}{18}}$ som ett bråktal på enklaste bråkform.

Lösning. Vi subtraherar i täljare och och adderar i nämnare och utför sedan divisionen vilket ger

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{7} - \frac{3}{11}}{\frac{2}{63} + \frac{11}{18}} &= \left(\frac{1}{7} - \frac{3}{11}\right) \div \left(\frac{2}{63} + \frac{11}{18}\right) \\
&= \left(\frac{1 \cdot 11}{7 \cdot 11} - \frac{3 \cdot 7}{11 \cdot 7}\right) \div \left(\frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 9 \cdot 2} + \frac{11 \cdot 7}{2 \cdot 9 \cdot 7}\right) \\
&= \left(\frac{11 - 21}{11 \cdot 7}\right) \div \left(\frac{4 + 77}{2 \cdot 9 \cdot 7}\right) = \frac{-10 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 7}{11 \cdot 7 \cdot 81} = -\frac{20}{99},
\end{aligned}$$

efter förenkling. □

Man ska inte vara snabb med att multiplicera ihop faktorerna i nämnaren. Om man behåller faktoriseringen ända till sista steget är det mycket lättare att se vad man eventuellt kan förkorta med för att få svaret på enklaste bråkform.

1.2.3. Räkneregler

De prioritets- och räkneregler som gällde för heltalen gäller även för rationella tal. Här sammanfattas de räkneregler som tillkommer för de rationella talen. Observera att nämnaren $d \cdot b$ kan vara onödigt stor och att man alltid bör hitta den minsta gemensamma nämnaren istället.

Räkneregler

För alla rationella tal, $\frac{a}{b}$ och $\frac{c}{d}$, där $a,\ b,\ c$ och d är heltal, gäller det att

- $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{d \cdot a}{d \cdot b}+\frac{b \cdot c}{b \cdot d}=\frac{d \cdot a+b \cdot c}{d \cdot b}$
- $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{d \cdot a-b \cdot c}{d \cdot b}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}=\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}=\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Sist i avsnittet ska vi titta närmare på likhet och olikheter mellan rationella tal.

Likheten $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ äger rum om och endast om (d v s precis när) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}=\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}=1$, alltså om och endast om $ad=bc$. Båda uttrycken *om och endast om* och *precis när* betyder att påståendena före och efter är *ekvivalenta*, d v s att de är sanna eller falska samtidigt. Ekvivalens mellan påståenden skrivs ofta med en dubbelpil, $\Leftrightarrow$. Notera att det *måste* stå påståenden på båda sidor, ekvivalenspilen kan inte användas som likhetstecken.

Olikheter och räkneregler för olikheter diskuteras något i avsnittet om reella tal och mer ingående i kursens andra del. Här går vi händelserna i förväg för att komma till insikt om hur man jämför *positiva* rationella tal.

Antag att a, b, c, d är positiva heltal. Det är rimligt att ha samma definition för olikhet som tidigare, d v s vi utgår från att

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d} \quad \text{om och endast om} \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}>0.$$

Nu kan vi skriva de två bråktalen på gemensam nämnare, subtrahera, och får

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ad-bc}{bd}>0.$$

"Minus minus är plus"-regeln säger att detta inträffar om och endast om täljaren och nämnaren har samma tecken. Eftersom $b,d > 0$, har vi att $bd > 0$ och får slutligen

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ad - bc > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ad > bc.$$

Vi sammanfattar

- För alla rationella tal, $\frac{a}{b}$ och $\frac{c}{d}$, där $a,\ b,\ c$ och d är heltal, gäller det att
  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ om och endast om $ad = bc$.
- Om dessutom $a,\ b,\ c$ och d är *positiva* heltal, gäller det att
  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ om och endast om $ad > bc$.

Vi avslutar med att konstatera en av de rationella talens viktigaste egenskaper som skiljer dem från heltalen: givet två olika rationella tal finns alltid ett tredje rationellt tal mellan dem, d v s om $r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ r_1 < r_2$, så finns $r \in \mathbb{Q}$ sådant att $r_1 < r < r_2$. Även om det låter abstrakt är det i själva verket oerhört lätt att visa, välj helt enkelt $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ (talet mittemellan de två givna). Man kanske har svårt att omedelbart inse konsekvenserna av detta faktum. En konsekvens är att det, givet ett rationellt tal, inte finns ett "nästa" rationellt tal. En annan är att man kan tala om gränsvärden av rationella talföljder på ett meningsfullt sätt.

1.2.4. Övningar

1.2.1 Skriv följande rationella tal på enklaste bråkform

a) $\frac{5040}{40320}$ b) $\frac{6182}{-616}$ c) $\frac{(-42)\cdot 308 \cdot 230}{(-60)\cdot 121 \cdot (-69)}$

d) $\frac{1}{4} + \frac{3}{5}$ e) $3 + \frac{1}{4} + \frac{17}{6} + \frac{35}{8}$ f) $\frac{49}{17} - \frac{1}{5} + \frac{5}{3} - 3$

1.2.2 Skriv följande rationella tal på enklaste bråkform

a) $\frac{1}{4} - (\frac{4}{3} - \frac{13}{6})$

b) $\frac{9}{4} - \frac{16}{5} - \left(\frac{11}{21} - \frac{26}{7} + 4\right) + \left(\frac{16}{5} - \frac{22}{15}\right)$

1.2.3 Skriv följande rationella tal på enklaste bråkform

a) $\frac{1}{7} \div \frac{4}{7}$

b) $\frac{6}{11} \cdot \frac{11}{24} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{38}{17}$

c) $\frac{13}{6} \cdot \frac{15}{4} \div \frac{55}{12}$

d) $-\frac{34}{3} \cdot \frac{12}{5} \div \left(-\frac{17}{15}\right)$

e) $\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{20}\right) \div \left(\frac{9}{100} \cdot \frac{5}{19}\right)$

f) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{20} \div \frac{9}{100} \cdot \frac{5}{19}$

g) $\left(\frac{77}{8} \div \frac{4}{3}\right) \div \left(\frac{24}{13} \div \frac{6}{11}\right)$

h) $\frac{77}{8} \div \frac{4}{3} \div \frac{24}{13} \div \frac{6}{11}$

1.2.4 Skriv följande rationella tal på enklaste bråkform

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right)$

b) $\dfrac{\frac{23}{6} - \frac{23}{8}}{\frac{49}{11} - \frac{19}{6}}$

c) $\dfrac{\frac{13}{4} - \frac{31}{12}}{\frac{6}{5} - \frac{2}{7}} - \dfrac{\frac{13}{11} - \frac{8}{9}}{\frac{23}{99}} \cdot \dfrac{46}{41}$

1.2.5 Skriv talen a, b, c, d i avtagande ordning.

a) $a = \frac{2}{3}, b = \frac{5}{6}, c = \frac{7}{8}, d = \frac{4}{5}$

b) $a = -\frac{1}{5}, b = -\frac{2}{11}, c = -\frac{3}{14}, d = -\frac{5}{19}$

1.3. Potenser med heltalsexponent

1.3.1. Potenser

I detta avsnitt introduceras begreppet potens för rationella tal, och därmed naturligtvis för alla heltal. Exponenten är här heltal men längre fram (i avsnitt 1.7) kommer exponenten att vara ett rationellt tal och slutligen ett reellt tal. De räknelagar som presenteras i avsnittet är allmängiltiga, de gäller även med reella exponenter.

1.3.2. Potens med heltalsexponent

Potenser med *heltalsexponenter* definieras av

$$\begin{aligned}
a^0 &= 1, \quad \text{för } a \neq 0, \\
a^1 &= a, \\
a^2 &= a \cdot a, \\
a^3 &= a \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a, \\
a^n &= a \cdot a^{n-1} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ faktorer}}, \quad \text{då } \ n \ \text{ är ett positivt heltal,} \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \quad \text{då } \ n \ \text{ är ett positivt heltal och } \ a \neq 0.
\end{aligned}$$

I definitionen ovan kan n bara vara ett heltal medan a kan vara såväl ett heltal som ett rationellt tal.

Vid beräkning av potenser av negativa tal måste man vara extra uppmärksam. De beräknas naturligtvis på samma sätt som potenser av positiva tal, så t ex

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81.$$

Man *måste* skriva parentes runt talet, eftersom $-3^4 = -81 \neq (-3)^4 = 81$.

Eftersom $(-1)^2 = 1$, så gäller att: $(-a)^1 = -a$, $(-a)^2 = a^2$, $(-a)^3 = -a^3 = -(a^3)$ och allmänt

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{om } \ n \text{ är ett jämnt heltal} \\ -a^n & \text{om } \ n \text{ är ett udda heltal.} \end{cases}$$

Definitionen av multiplikation för rationella tal $\dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{p}{q} = \dfrac{p \cdot p}{q \cdot q} = \dfrac{p^2}{q^2}$ ger för potenser av rationella tal att $\left(\dfrac{p}{q}\right)^n = \dfrac{p^n}{q^n}$. I detta fall är det nödvändigt att använda förtydligande parenteser, eftersom man annars får $\dfrac{p^n}{q} \left(\neq \dfrac{p^n}{q^n}\right)$.

1.3.3. Räkneregler

Vi sammanfattar här de regler som gäller vid räkning med potenser. De kan härledas om man skriver ut vad de olika potenserna är. T ex är

$$(2^3)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}.$$

Potenslagar

För a, $b \neq 0$ och m, n heltal gäller det att

- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Vid räkning med potenser gäller prioritetsregeln att potenser beräknas före multiplikation eller division och även före addition eller subtraktion, så t ex

$$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18 \quad \text{och} \quad 2 + 3^2 = 2 + 9 = 11.$$

Som tidigare skall operation inom parenteser beräknas först så t ex

$$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36 \quad \text{och} \quad (2+3)^2 = 5^2 = 25.$$

Vid upprepad potensberäkning, som i 2^{3^3}, gäller att exponenten beräknas först så vi får

$$2^{3^3} = 2^{(3^3)} = 2^{27} = 134217728 \quad \text{och} \quad 2^{5+3} = 2^{(5+3)} = 2^8 = 256.$$

Också här ger parenteser förtur så $(2^3)^3 = 8^3 = 512$

En liten **varning!** Det finns ingen standardprioritet för upprepad potensberäkning på räknare. Vissa kalkylatorer har ”exponenten först” prioritet, andra har läsriktningsprioritet. Uttrycket 2^{3^3} kan bli antingen 134217728 eller 512 beroende på räknarfabrikatet och ibland t o m på modellen. Använd alltid parenteser för säkerhets skull.

Här sammanfattar vi de prioritetsregler som behandlats hittills.

Prioriteringsordning

1. Operation inom parenteser
2. Exponent
3. Potens
4. Multiplikation och division
5. Addition och subtraktion
6. Vid lika prioritet gäller läsriktningsprioritet

1.3.4. Övningar

1.3.1 Beräkna

a) 5^2 b) 2^5 c) $(-3)^4$ d) $(-4)^3$

e) 1^{100} f) 100^1 g) 3^0 h) $(-3)^0$

1.3.2 Skriv följande som ett bråktal på enklaste form, utan potenser.

a) 2^{-2} b) $(-3)^{-3}$ c) 1^{-5}

1.3.3 Skriv som potenser av 2

a) $1/64$ b) $16^3/2^{10}$ c) $128^3/32^5$

1.3.4 Skriv följande som ett tal på enklaste bråkform, utan potenser.

a) $\dfrac{2^5 \cdot 3^{-7} \cdot 105 \cdot (-7^{-2})}{2^3 \cdot 3^{-5} \cdot 5}$ b) $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^{-1} \div \left(\frac{3}{10}\right)^{-3}}{56 \cdot 10^{-6}}$

1.4. Reella tal

Vår önskan att kunna subtrahera obehindrat ledde oss till definitionen av negativa tal (och därmed heltal), medan behovet av rationella tal (bråktal) bottnade i att vi ville kunna dividera obehindrat. Låt oss nu, givet $b \in \mathbb{Q},\ b \geq 0$, försöka hitta ett tal $a \in \mathbb{Q},\ a \geq 0$, sådant att $a^2 = b$. Det är lätt för vissa tal b, men inte för andra. För $b = 4$

får vi $a = 2$, för $b = 0$ får vi $a = 0$, $b = \frac{1}{9}$ ger $a = \frac{1}{3}$. Men, kan man lösa problemet för $b = 2$? Det visar sig att svaret är nej.

Sats: Det finns inget rationellt tal vars kvadrat är lika med 2.

Bevis. Antag motsatsen, d v s antag att det finns ett rationellt tal r sådant att $r^2 = 2$. Talet r kan då skrivas på enklaste bråkform $r = \frac{p}{q}$, där p och q är relativt prima heltal, d v s p och q har inga gemensamma delare andra än ± 1. Eftersom $p^2 = 2q^2$ måste p vara ett jämnt tal, $p = 2s$. Det medför att $4s^2 = 2q^2$, och alltså att $q^2 = 2s^2$. Därmed måste även q vara jämnt. Vi fick att p och q båda är delbara med 2, vilket strider mot att de är relativt prima. Motsägelsen beror på det felaktiga antagandet att det finns ett tal $r \in \mathbb{Q}$ sådant att $r^2 = 2$, alltså finns inget rationellt tal vars kvadrat är lika med 2. $\square$

Givet ett icke-negativt tal b, definieras *kvadratroten* ur b som det icke-negativa tal a, vars kvadrat är lika med b, d v s $\sqrt{b} = a$ är samma sak som $a \geq 0$, $a^2 = b$. Satsen vi visade ovan säger att kvadratroten ur 2 inte finns så länge vi med tal menar rationella tal. Detta antyder att det är på sin plats att utföra ytterligare en utvidgning av begreppet tal – vi har kommit fram till de *reella talen*.

Det är mycket svårt att definiera vad som menas med ett reellt tal. Vi måste därför hålla oss till en relativt intuitiv och förenklad bild av begreppet. Den framställning vi valt att presentera här (om än något viftande) bygger på talens decimalutvecklingar.

Vi är vana vid att skriva alla tal i ett s k positionssystem med basen 10. Positionssystem betyder att en siffras värde beror på dels vilken denna siffra är, dels vad den har för plats (position) i talets framställning. Att ett naturligt tal n skrivs som $n = \overline{c_4c_3c_2c_1c_0}$ i basen 10 betyder att $n = c_4 \cdot 10^4 + c_3 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0$, där $0 \leq c_k \leq 9$. (Strecket markerar att det inte handlar om en produkt.) På liknande sätt kan man skriva rationella tal, $r = n,\overline{d_1d_2}$ är samma sak som $r = n + d_1 \cdot 10^{-1} + d_2 \cdot 10^{-2}$. I praktiken hittar man ett rationellt tals decimalutveckling genom att utföra divisionen i $r = \frac{p}{q}$. Talet n är kvoten vid heltalsdivisionen $p \div q$, $p = nq + r_1$; den första decimalen d_1 är kvoten vid heltalsdivisionen $10r_1 \div q$, $10r_1 = d_1q + r_2$, etc. Det är inte svårt att inse att alla rationella tals decimalutvecklingar antingen är ändliga, eller avslutas periodiskt. Decimalutvecklingen blir ändlig om man i något skede kommer fram till rest 0. Den blir oändlig med periodiskt avslut om man aldrig kommer fram till rest 0. Periodiciteten beror på att det endast finns $q - 1$ möjliga rester som inte är noll, så att man förr eller senare kommer fram till en rest som varit framme tidigare, varpå decimalerna upprepas. Det omvända är också sant, alla ändliga decimalutvecklingar och alla decimalutvecklingar med periodiskt avslut ger rationella tal.

Exempel. Talet $\frac{1}{8}$ har den ändliga decimalutvecklingen $0,125$.

$\square$

Exempel. Talet $\frac{5}{6}$ har den periodiska decimalutvecklingen $0,8333\ldots$.

$\square$

Exempel. Talet $\frac{29}{17}$ har decimalutvecklingen

$$\frac{29}{17} = 1,70588235294117647058823529411764\ldots.$$

De avslutande punkterna innebär som vanligt att mönstret fortsätter obrutet. Sifferkombimationen som upprepas periodiskt har maximal längd (16).

$\square$

Exempel. Skriv talet $r = 0,3535353535\ldots$ på enklaste bråkform $r = \frac{p}{q}$.

Lösning. Vi har att $100r = 35 + r$, så att $r = \frac{35}{99}$, vilket är den enklaste bråkformen eftersom talen 35 och 99 är relativt prima. $\square$

Med ett *reellt* tal menas ett tal r som ges av en *decimalutveckling*, ändlig eller oändlig. Mängden av alla reella tal betecknas $\mathbb{R}$. De rationella talen är också reella tal, mängden av alla rationella tal är en *delmängd* av mängden av alla reella tal. Vi har alltså att

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Varje positivt reellt tal har en heltalsdel n, som är ett naturligt tal, och en decimaldel (bråkdel)

$$r = n,\overline{d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \ldots},$$

där alla talen d_i är siffror i talsystemet med bas 10, d v s naturliga tal mellan 0 och 9. Detta ska tolkas som att

$$r = n + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \frac{d_3}{1000} + \frac{d_4}{10000} + \frac{d_5}{100000} + \cdots.$$

Till varje positivt reellt tal finns ett motsatt, negativt tal

$$-r = -n,\overline{d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \ldots} = -\left(n + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \frac{d_3}{1000} + \frac{d_4}{10000} + \frac{d_5}{100000} + \cdots\right).$$

De decimalutvecklingar som är oändliga och som inte avslutas periodiskt sägs vara *irrationella tal*. Genom att bara ta med ändligt många decimaler får vi ett rationellt tal som approximerar det reella talet, t ex

$$3,1415927 = \frac{31415927}{10000000} \approx \pi.$$

Ju fler decimaler vi tar med dess bättre approximation får vi.

Man skulle kunna tro att olika tal måste representeras av olika decimalutvecklingar. Så är det inte. Betrakta talet $r = 0,9999\ldots$. Det måste vara ett rationellt tal, eftersom dess utveckling avslutas periodiskt. Vi resonerar som i det tidigare exemplet och får $10r = 9 + r$, d v s $r = 1$. (Det korrekta förfarandet vore att summera en oändlig geometrisk serie, i det här fallet $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots$.) Två decimalutvecklingar representerar samma reella tal om deras differens är 0, d v s om skillnaden mellan deras approximationer närmar sig 0 när man ökar antalet decimaler. Detta innebär att t ex $3,25300000\ldots = 3,25299999\ldots$.

Reella tal kan adderas, subtraheras, multipliceras och divideras, genom att man utför operationerna på deras rationella approximationer. Genom att ta med fler och fler decimaler får man en följd av rationella tal som närmar sig (har gränsvärdet) de reella talens summa, differens, produkt eller kvot. Alla räkneregler och prioritetsregler som gäller för rationella tal gäller även för reella. Ofta är det önskvärt att ha en så enkel nämnare som möjligt. Man förlänger därför med ett lämpligt tal så att nämnaren blir ett t ex ett positivt heltal (om det låter sig göras).

Exempel. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. □

En fördel är att det är svårt att avgöra hur stort talet $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ är, medan det är betydligt lättare att se att $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$. Observera att $\dfrac{1}{\pi}$ inte kan modifieras på liknande sätt.

Exempel. Förenkla

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Lösning. Vi har

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{3}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{6}\right) \cdot \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{6}.$$

□

För att åskådliggöra de reella talen använder man ofta punkter på tallinjen. De rationella talen ligger som det heter tätt på linjen, d v s hur liten sträcka vi än tar kommer den alltid att innehålla rationella tal. Ändå fyller de inte ut linjen, vi insåg tidigare att det finns ett ”hål” i punkten som motsvarar $\sqrt{2}$ som vi nu ”fyllt igen” med ett reellt tal.

I praktiken räknar vi bara med rationella approximationer till de reella talen, eller med symboler, som $\sqrt{2}$ [3], som representerar specifika reella tal. Redan de gamla grekerna visste att det inte finns rationella tal x sådana att $x^2 = 2, 3, 5, 6$ m fl, med andra ord att $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ m fl inte är rationella tal. Man kan numera visa att det däremot finns sådana reella tal.

1.4.1. Olikheter för reella tal

I likhet med heltalen och de rationella talen finns det tre typer av reella tal, de positiva, de negativa och talet 0. Detta gör det möjligt att definiera *olikhet*, *större än* och *mindre än* för reella tal.

> **Definition av olikhet:** Det reella talet a är *större än* talet b, skrivs $a > b$, om och endast om $a - b$ är positivt.
> Talet a är *mindre än* talet b, skrivs $a < b$, om och endast om $a - b$ är negativt.

För alla reella tal a och b finns därmed tre möjligheter: $a = b$, $a > b$ eller $a < b$.

I detta sammanhang har man ofta användning av en praktisk mängdbeskrivning. Säg till exempel att vi, av någon anledning, är intresserade av alla reella tal x som uppfyller villkoret $x < 5$. Ett praktiskt sätt att beskriva denna mängd av tal är

$$\{x \in \mathbb{R} : x < 5\},$$

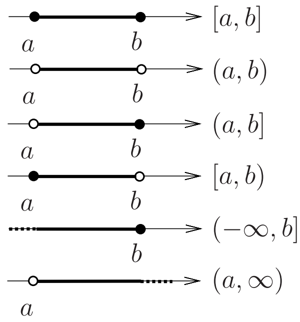
som tolkas och utläses på följande sätt. De speciella parenteserna $\{$ och $\}$ är mängdparenteser, (vardagligt krullparenteser). De inramar beskrivningen av objekten i mängden. Det inledande $x \in \mathbb{R}$ innebär att alla objekten skall tillhöra mängden av alla reella tal, kort sagt att alla objekt är reella tal. Kolon ':' läses *sådana att*. Efter kolontecknet kommer villkoret som skall vara uppfyllt för att ett reellt tal x skall få vara med i mängden. I ord läser man alltså: *mängden av alla reella tal x sådana att x är mindre än* 5. Vi har att $-3 \in \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$ och $12 \notin \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$. Talet -3 tillhör mängden medan talet 12 inte tillhör mängden.

Mängden av alla positiva reella tal kan skrivas som $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, mängden av de negativa reella talen som $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ och av de *icke-negativa* reella talen som $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

[3] Notera att $\sqrt{2}$ endast är en symbol, det är beteckningen för det icke-negativa reella tal vars kvadrat är 2.

Mängdbeteckningen kommer vi också att använda för andra grundmängder än de reella talen. Man kan t ex skriva $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 5\}$ vilket betyder mängden av alla heltal vars kvadrat är mindre än 5, d v s $\{-2,-1,0,1,2\}$.

Man inför de två s k oändligheterna, symbolerna $-\infty$ och ∞ som uppfyller $-\infty < x < \infty$ för alla reella tal x. Observera att oändligheterna **inte** är reella tal.



Figur 4: Olika typer av intervall

Vissa mängder, så kallade *intervall*, förekommer mycket ofta. Därför är det praktiskt att ha speciella beteckningar för sådana. Notera att grundmängden här alltid är de reella talen.

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}
\end{aligned}
$$

Lägg märke till att ‘(’ respektive ’)’ betyder att ändpunkten **inte** är med och att ‘[’ respektive ‘]’ betyder att ändpunkten är med.

1.4.2. Räkneregler för olikheter

Också för olikheter gäller vissa räkneregler. De kan alla härledas från definitionen av olikhet. Vi ger här ett exempel på regel och härledning.

Exempel. Vi skall bevisa olikhetsregeln: *Om a och b är reella tal sådana att $a < b$ så gäller det att $a+c < b+c$ för alla reella tal c.*

Lösning. Vi beräknar differensen $(b+c)-(a+c)$ och skall visa att denna är positiv om $a < b$. Men $(b+c)-(a+c) = b+c-a-c = b-a$, som är positiv eftersom $a < b$. Vi har därmed visat att $a+c < b+c$ om $a < b$. $\square$

Exempel. Vi skall bevisa olikhetsregeln: *Om a och b är reella tal sådana att $a < b$ och $c < 0$ så gäller det att $a \cdot c > b \cdot c$.* (Det är den olikhetsregeln man i särklass oftast gör fel på.)

Lösning. Vi beräknar differensen $a \cdot c - b \cdot c$ och skall visa att denna är positiv om $a < b$ och $c < 0$. Men $a \cdot c - b \cdot c = (a-b) \cdot c$. Eftersom $a < b$, d v s $a - b < 0$, och $c < 0$ har vi att båda faktorerna i den sista produkten är negativa. Alltså är produkten $(a-b) \cdot c$ positiv, vilket innebär att $a \cdot c > b \cdot c$. □

Vi återkommer till olikheter i del 2.

Räkneregler

För alla reella tal a, b, c och d, gäller det att

- Om $a < b$ och $b < c$ så gäller $a < c$
- Om $a < b$ så gäller $a + c < b + c$
- Om $a < b$ och $c < d$ så gäller $a + c < b + d$
- Om $a < b$ och $0 < c$ så gäller $a \cdot c < b \cdot c$
- Om $a < b$ och $c < 0$ så gäller $a \cdot c > b \cdot c$
- Om $0 < a < b$ så gäller $a^2 < ab < b^2$
- Om $a < b < 0$ så gäller $a^2 > ab > b^2$
- Om $a, b > 0$ och $a^2 < b^2$ så gäller $a < b$
- Om $a, b < 0$ och $a^2 < b^2$ så gäller $a > b$

1.4.3. Övningar

1.4.1 Gäller det att

a) $2 \in \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\}$?   b) $2 \leq 3$?

(Symbolen $\leq$ utläses *mindre än eller lika med*. Talet 3 är med i mängden.)

c) Är det någon skillnad på utsagorna i (a) och (b) ovan?

1.4.2 Visa att räknereglerna för olikheter i avsnitt 1.4.2 gäller genom att använda metoden som presenteras i exemplet i samma avsnitt.

1.4.3 Ge exempel på reella tal a, b, c och d sådana att

$a < b$ och $c < d$ men där $a - c < b - d$ *inte* gäller.

1.4.4 Skriv talen nedan på decimalform.

a) $\dfrac{17}{8}$ b) $\dfrac{7}{6}$ c) $-\dfrac{3}{14}$

1.4.5 Skriv talen nedan på enklaste bråkform.

a) $-2,33333\ldots$ b) $0,852852852\ldots$ c) $1,2399999\ldots$

1.5. Absolutbelopp

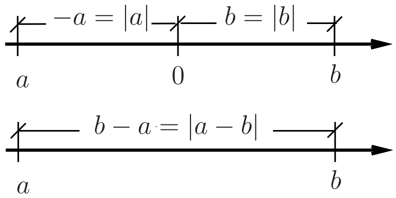
I detta avsnitt introduceras ett viktigt begrepp, nämligen *absolutbeloppet* av ett reellt tal. Absolutbeloppet är i grund och botten ett avstånd, och därför alltid ett icke-negativt tal.

Definition: Om a är ett reellt tal så är *absolutbeloppet* av a

$$|a| = \begin{cases} a & \text{om} \quad a \geq 0, \\ -a & \text{om} \quad a < 0. \end{cases}$$

Tänk på att $-a$ är det motsatta talet till a. Om a är negativt så är $-a$ positivt, så t ex är $|-3| = -(-3) = 3$.

Av definitionen följer direkt att $|a| = |-a| \geq 0$ för alla reella tal a. En geometrisk tolkning av absolutbeloppet är att $|a|$ talar om hur långt från punkten 0 som punkten a ligger på tallinjen, d v s $|a|$ är lika med avståndet mellan a och 0.



Figur 5: Olika avstånd

Om a och b är två reella tal så är $|a-b|$ avståndet mellan a och b på tallinjen. Vi har t ex att -7 och 3 ligger på avståndet 10 från varandra, eftersom $|-7-3| = |-10| = 10$.

Exempel. Vi söker de tal x som uppfyller $|3-x| = 5$.

Lösning. Vi söker de punkter på tallinjen, som ligger på avståndet 5 från 3. Det är två punkter, en till höger om 3, nämligen $3+5=8$, och en till vänster, $3-5=-2$. $\square$

Exempel. Vi söker de tal x som uppfyller $|3-x| \leq 5$.

Lösning. Nu söker vi de punkter på tallinjen, som ligger på avstånd *högst* 5 från 3. Det är alla punkter som ligger *mellan* 3 och $3+5=8$, eller *mellan* 3 och $3-5=-2$, alltså alla punkter mellan -2 och 8, och vi får

$$\{x \in \mathbb{R} : |3-x| \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \text{ och } x \leq 8\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 8\} = [-2, 8].$$

$\square$

Tidigare definierades $\sqrt{x}$, för $x \geq 0$ som det (enda) icke-negativa tal vars kvadrat är x. Det betyder att $\sqrt{4} = 2$, och därmed att $\sqrt{2^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$. Generellt gäller att

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a| \quad \text{för alla reella tal} \quad a.}$$

1.5.1. Övningar

1.5.1 Bestäm

a) $|7|$ b) $|-7|$ c) $|0|$

1.5.2 Bestäm alla reella tal x sådana att

a) $|x+1| = 1$ b) $|3-x| = 7,5$ c) $|x+4| = 0$

d) $|3-2x| = 5$ e) $|x-2| = -2$

1.5.3 Ange (utan beloppstecken) de x, som satisfierar

a) $|x-1| \leq 2$ b) $|x+3| < 5$ c) $|x+3| > 5$

d) $|x+2| \leq 0$ e) $2 < |x-2| \leq 3$ f) $|x+1| > 0$

1.6. Kvadratrötter

Vi har redan tidigare haft anledning att definiera och kommentera kvadratrötter. Här gör vi det något mer systematiskt. Vi återkommer till ämnet i kapitlet om funktioner.

1.6.1. Kvadratroten ur ett positivt reellt tal

Eftersom produkten av såväl två positiva tal, som två negativa tal, är positiv så gäller det att

$$x^2 = x \cdot x \geq 0 \text{ för alla reella tal } x.$$

Alltså har ekvationen $x^2 = b$ ingen reell lösning om $b < 0$. I avsnitt 1.4 behandlades svårigheterna med att avgöra huruvida en viss ekvation har lösningar i det talsystem man arbetar med. Där påpekades att ekvationen $x^2 = b$ alltid har en (d v s minst en) reell lösning om $b > 0$. I själva verket har den alltid två, t ex har ekvationen $x^2 = 9$ lösningarna 3 och -3.

Definition: Med *kvadratroten* ur b, $\sqrt{b}$, där $b \geq 0$, menas det icke-negativa, reella tal, vars kvadrat är b.

Notera att $\sqrt{b} \geq 0$. Alltså är $\sqrt{9} = 3$ och **inte** -3 eller ± 3. Det gäller också att $\sqrt{0} = 0$. Enligt definitionen har vi alltså att $(\sqrt{b})^2 = b$. Men det gäller också att

$$\left(-\sqrt{b}\right)^2 = \left(-\sqrt{b}\right) \cdot \left(-\sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{b}\right)^2 = b.$$

Alltså gäller det att:

Ekvationen $x^2 = b$ har för $b > 0$ två olika reella lösningar (ibland även kallade rötter): $\sqrt{b}$ och $-\sqrt{b}$

Man skriver ibland $x^2 = b \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \pm\sqrt{b}$, för $b \geq 0$. Med detta menas alltså att ekvationen har lösningarna $x_1 = \sqrt{b}$ och $x_2 = -\sqrt{b}$

Exempel. Ekvationen $x^2 = 9$ har således lösningarna (rötterna) $x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, d v s $x_1 = 3$ och $x_2 = -3$. $\square$

Exempel. Ekvationen $x^2 = 20$ har lösningarna (rötterna) $x_{1,2} = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$, eftersom direkt kontroll ger att $(2\sqrt{5})^2 = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 4(\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20$. $\square$

1.6.2. Räkneregler

Av definitionen av kvadratrot får vi följande räkneregler:

Räkneregler för kvadratrot

- $(\sqrt{a})^2 = a$ för $a \geq 0$.
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ och $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, för $a \geq 0$ och $b > 0$.
- $\sqrt{a^2} = |a|$ för alla reella a, d v s
$$\sqrt{a^2} = a \text{ om } a \geq 0 \text{ och } \sqrt{a^2} = -a \text{ om } a < 0.$$
- $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ för $b \geq 0$ och alla a, d v s
$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b} \text{ om } a \geq 0 \text{ och } \sqrt{a^2 \cdot b} = -a \cdot \sqrt{b} \text{ om } a < 0.$$
- $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$, om $a > 0$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ och $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$, $a \neq b$, $a,b > 0$.

Den första punkten följer direkt av definitionen av kvadratrot eftersom $\sqrt{a}$ *är* det icke-negativa tal vars kvadrat är a.

Punkt två kan bevisas genom att vi konstaterar att $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ och att

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b.$$

Alltså är $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ enligt definitionen av kvadratrot.

På liknande sätt bevisas regeln för roten ur en kvot och de två efterföljande reglerna.

Den femte regeln följer av

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}.$$

Metoden som används i sista punkten kallas *förlängning med konjugatuttryck*. Uttrycken $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ och $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ kallas konjugerade, eller varandras konjugat. Om man multiplicerar de med varandra så får man (se avsnitt 1.8 för den s k konjugatregeln)

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - \sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt{b} - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a-b.$$

De två sista reglerna kan nu visas genom att man förlänger med konjugatet, så t ex för den första likheten har vi

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \text{ för } a \neq b,\, a,b > 0.$$

Anmärkning. I allmänhet, alltså för de flesta tal a och b, är

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Till exempel ger $a = b = 1$ att $\sqrt{a+b} = \sqrt{2}$, medan $\sqrt{a}+\sqrt{b} = 2$. På samma sätt är i allmänhet

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

Exempel. Här kommer ett antal exempel på hur man kan använda räknereglerna.

(a) Ekvationen $4x^2 - 3 = 0$ får vi till $x^2 = 3/4$ genom att addera 3 till båda leden och sedan dividera dem med 4. Den har därmed lösningarna

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(b) Den tredje punkten ger

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3 = |-3|.$$

(c) Den fjärde punkten handlar om att bryta ut ur eller multiplicera in faktorer i rotuttryck och vi har t ex

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

och

$$-2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} = -\left(2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{2^2\cdot 3}{2}} = -\sqrt{6}.$$

(d) Den fjärde punkten ger ibland möjlighet till förenkling om man har flera rötter sådana att talen under rottecknen har gemensamma faktorer. Här kommer ett exempel

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{27}+\sqrt{48} = \sqrt{3}+2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+4\sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$

(e) Den näst sista punkten ger t ex

$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}\ (\approx 0{,}4).$$

(f) Förlängning med konjugat (sista punkten) ger att man kan skriva om uttryck som

$$\frac{1}{5+\sqrt{6}}$$

på följande sätt

$$\frac{1}{5+\sqrt{6}} = \frac{5-\sqrt{6}}{(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})} = \frac{5-\sqrt{6}}{5^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{5-\sqrt{6}}{25-6} = \frac{5-\sqrt{6}}{19}$$

så att man får heltalsnämnare.

(g) Vi kan jämföra storleksordningen mellan tal som innehåller kvadratrötter utan att använda räknare. Låt oss jämföra talen $\sqrt{2}+1$ och $\sqrt{5}$. Eftersom vi inte vet vilket av dem som är störst, skriver vi frågetecken mellan dem. Vi använder räknereglerna för olikheter. Både vänster- och högerledet är positiva, alltså får vi samma olikhetstecken efter kvadrering

$$\sqrt{2}+1 \ ?\ \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{2}+1)^2 \ ?\ (\sqrt{5})^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4+2\sqrt{2}+1 \ ?\ 5 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} \ ?\ 0.$$

Eftersom $\sqrt{2} > 0$, gäller $\sqrt{2}+1 > \sqrt{5}$.

(h) Här visar vi att $\dfrac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})} > 1$. Enligt räknereglerna för olikheter kan vi förlänga med 3 och istället visa att $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} > 3\cdot 1 = 3$, eftersom $3 > 0$. Vänsterledet kan nu skrivas om

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Vi använder återigen räknereglerna för olikheter: $\sqrt{3}+\sqrt{2} > 3 \ \Leftrightarrow\ (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 > 9 \ \Leftrightarrow\ 3+2\sqrt{6}+2 > 9 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{6} > 2 \ \Leftrightarrow\ 6 > 4$, vilket är uppenbart, alltså är det sant att $\dfrac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})} > 1$.

$\square$

1.6.3. Övningar

1.6.1 Förenkla

a) $\sqrt{0,49}$ b) $\sqrt{90000}$ c) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{75}$ d) $\sqrt{10}/\sqrt{125}$

e) $\sqrt{12}-\sqrt{3}$ f) $\sqrt{2}-\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{16}-\sqrt{32}+\sqrt{64}$.

1.6.2 Lös ekvationen

a) $x^2-25=0$ b) $5-x^2=0$ c) $9x^2-4=0$ d) $16-6x^2=0$

e) $x^2=0$

1.6.3 Skriv med heltalsnämnare

a) $2/\sqrt{6}$ b) $3/\sqrt{21}$ c) $1/(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

d) $2/(\sqrt{11}-3)$ e) $1/(2-\sqrt{5})$ f) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})/(\sqrt{6}+\sqrt{3})$

1.7. Potenser med rationell exponent

1.7.1. n-te roten ur reella tal

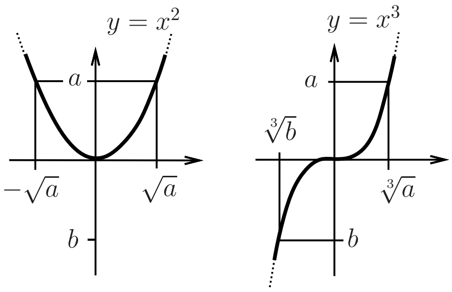
Man kan visa att, om $b \geq 0$ och n är ett positivt heltal, så finns, i likhet med specialfallet $n=2$, precis ett icke-negativt tal a sådant att $a^n = b$. Om n är ett jämnt tal så gäller också att $(-a)^n = b$. Om n är ett udda tal så gäller istället att $(-a)^n = -b$. Detta leder till följande definition av n-te roten ur ett icke-negativt tal.

Definition: Om n är ett positivt heltal och $b \geq 0$ är ett reellt tal, så menas med *n-te roten* ur b, $\sqrt[n]{b}$, det *icke-negativa* reella tal vars n-te potens är b, d v s som uppfyller $(\sqrt[n]{b})^n = b$.

Om b är ett negativt tal och n är ett positivt, udda heltal så menas med $\sqrt[n]{b}$ det *negativa* reella tal vars n-te potens är b, d v s som uppfyller $(\sqrt[n]{b})^n = b$.

Ekvationen $x^n = b$, där b reellt tal och n är ett positivt heltal, har då följande *reella lösningar (rötter)*:

1. $x = \sqrt[n]{b}$, om n är ett *udda* (positivt) heltal,
2. $x = \pm\sqrt[n]{b}$, om $b \geq 0$ och n är ett *jämnt* (positivt) heltal,
3. saknar reella rötter om n är *jämnt* och $b < 0$ (roten $\sqrt[n]{b}$ är i detta fall *inte* definierad).



Figur 6: Grafen till x^2 och x^3

För *udda* $n = 1, 3, 5, \ldots$ gäller att: $\sqrt[n]{-b} = -\sqrt[n]{b}$. Definitionen av $\sqrt[n]{b}$ gäller även för $n = 1$, vi har då att $\sqrt[1]{b} = b$ för alla reella tal b.

Exempel. Eftersom $2^4 = 16$ och $5^3 = 125$ så får vi

$$\sqrt[4]{16} = 2, \; \sqrt[3]{125} = 5 \text{ och } \sqrt[3]{-125} = -5.$$

direkt från definitionen. $\square$

1.7.2. Räkneregler

Följande *räkneregler* för *n-te rötter* bevisas på samma sätt som motsvarande regler för kvadratroten.

Räkneregler för n-te rötter

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, för $a \geq 0$ om n är jämnt, för alla a om n är udda.
- $\sqrt[n]{a^n} = a$ för alla a om n är udda.
- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ om n är jämnt.
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ och $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, för $a \geq 0$ och $b > 0$.

Exempel.

(a) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$

(b) $\sqrt[3]{-81} = \sqrt[3]{-3^4} = \sqrt[3]{(-3)3^3 \cdot 3} = -3\sqrt[3]{3}$

$\square$

Precis som för kvadratrötter gäller i allmänhet

$$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}.$$

1.7.3. Potenser med rationell exponent

I detta avsnitt definieras vad som menas med en potens med rationell exponent. Definitionen bygger både på potens med heltalsexponent (avsnitt 1.3) och på definitionen av n-te roten som gjordes i föregående avsnitt. Många av n-te rotens egenskaper är lättare att ta till sig efter en omskrivning som potens med rationell exponent. I slutet av avsnittet "översätter" vi en viktig egenskap från potensspråk till rotspråk.

Definition: Om $\frac{m}{n}$, $(n > 0)$, är ett rationellt tal och $b > 0$ är ett reellt tal så ges $b^{\frac{m}{n}}$ av

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}.$$

Speciellt gäller

$$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}.$$

Om $m, n > 0$ gäller definitionen även för $b = 0$.

Speciellt är $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$. Exempelvis gäller för *kvadratroten*, att

$$\sqrt{b} = \sqrt[2]{b} = b^{\frac{1}{2}}.$$

Heltalet m kan skrivas som $\frac{m}{1}$. För att definitionen ovan ska vara lyckad måste $a^m = a^{\frac{m}{1}}$. Som tur är får vi $a^{\frac{m}{1}} = \sqrt[1]{a^m} = a^m$. Inte nog med det, eftersom $\frac{m}{n} = \frac{s \cdot m}{s \cdot n}$ för alla $s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$, vore det olyckligt om det skulle visa sig att resultatet är beroende av s. Så är det inte, för positiva reella tal b och $s, n > 0$ gäller att $b^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{s \cdot m}{s \cdot n}}$. Istället för att ge ett generellt bevis illustrerar vi detta med ett exempel (exakt samma metod fungerar för allmänna m, n, s).

Exempel. För $b > 0$ gäller att $b^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{4}{6}}$.

Per definition har vi att $b^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{b^2}$, medan $b^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{b^4}$. För att visa att båda talen är lika med varandra räcker det att visa att $\left(\sqrt[3]{b^2}\right)^6 = b^4$ (det skulle betyda att $\sqrt[3]{b^2}$ är ett positivt tal vars sjätte potens är b^4, och alltså att $\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[6]{b^4}$). Vi har

$$\left(\sqrt[3]{b^2}\right)^6 = \left(\left(\sqrt[3]{b^2}\right)^3\right)^2 = \left(b^2\right)^2 = b^4,$$

och därmed har vi visat att $b^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{4}{6}}$. $\square$

För udda heltal n kunde vi definiera $\sqrt[n]{b}$ även för $b < 0$. Man använder därför ibland skrivsättet $b^{\frac{1}{n}}$ för udda n även då $b < 0$. Här krävs dock stor försiktighet, beroende på att rationella tal inte har en entydig framställning på formen $\frac{p}{q}$. Man måste komma ihåg att definitionen $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ endast gäller för $b > 0$. Att det inte går att generellt definiera potens med rationell exponent för negativa tal framgår av följande exempel.

Exempel. Vi har att $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$. Men vi har också att $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Om man skulle tillämpa definitionen av $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ med $b = -27$ skulle man få

$$-3 = (-27)^{\frac{1}{3}} = (-27)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{3^6} = 3,$$

en motsägelse. $\square$

1.7.4. Räkneregler

Med hjälp av räknereglerna för n-te roten ur ett positivt tal och räknereglerna för potenser med heltalsexponent kan man visa att *potensuttrycket* $b^{\frac{m}{n}}$ med rationell exponent för $b > 0$ lyder samma *potenslagar* som potens med heltalsexponent (se avsnitt 1.3.3).

Potensregler

För alla positiva reella tal a och b och alla rationella tal x och y gäller det att

- $a^0 = 1$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Potensregeln $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ med $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{m}$ (n och m är heltal, större än eller lika med 2) kan skrivas om till en räkneregel för n-te rötter:

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}, \text{ för alla } a > 0 \text{ och alla } m,n \in \mathbb{N},\ m,n \geq 2}$$

Exempel. Här är några exempel på hur man tillämpar räknereglerna.

(a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$ för $a \geq 0$.

(b) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}} = (2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{18}} = \sqrt[18]{2}$

(c) $\sqrt[12]{125} = \sqrt[12]{5^3} = (5^3)^{\frac{1}{12}} = 5^{\frac{3}{12}} = 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$

(d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{8 \cdot 9} = \sqrt[6]{72}$

(e) $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2} - 2 + 2\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} - 2$

$\square$

1.7.5. Övningar

1.7.1 Förenkla

a) $27^{1/3}$ b) $4^{-0,5}$ c) $(\sqrt{8})^{2/3}$

d) $2^{1/3} \cdot 2^{-4/3}$ e) $3^{1/2}/9^{-3/4}$ f) $3^{-2/3}/(1/3)^{-4/3}$

g) $(0,0016)^{-0,25}$

1.7.2 Förenkla

a) $\sqrt[6]{9}$ b) $\sqrt[6]{8}$ c) $\sqrt[3]{-24}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$

e) $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$ f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$ g) $4/\sqrt[3]{16}$

h) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[6]{9} + \sqrt{12} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

1.7.3 Förenkla

a) $\sqrt[3]{3a^2} \cdot \sqrt[3]{9a}$ b) $\sqrt{x}/\sqrt[4]{x}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$ e) $\sqrt[4]{a^3}/\sqrt[3]{a}$ f) $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

1.8. Algebraiska omskrivningar

Syftet med algebraiska omskrivningar är att framställa algebraiska uttryck på den form som är lämpligast för det man sysslar med. Man talar ofta om ”förenkling”, men det gäller att komma ihåg att ordet ”enkelt” kan betyda olika saker i olika sammanhang.

Vid algebraiska omformningar utnyttjas alla de räkneregler som gäller vid räkning med reella tal, potenser, olikheter etc. Man bör därför vara synnerligen väl förtrogen med dessa.

När man skriver produkter med variabler inblandade utelämnar man ofta multiplikationssymbolen. Produkten $6 \cdot a$ skrivs $6a$, $a \cdot b \cdot c$ skrivs abc o s v. Då man utelämnar multiplikationssymbolen måste man vara säker på att detta inte orsakar missuppfattning, abc skulle kunna vara *en* variabel istället för en produkt av tre variabler. Hur skall $2m + 10cm$ tolkas? Betyder det $210cm$ eller $2 \cdot m + 10 \cdot c \cdot m = 2 \cdot (1 + 5 \cdot c) \cdot m$? Det beror helt på sammanhanget. I detta kapitel skall abc tolkas $a \cdot b \cdot c$ och $2m + 10cm$ betyder $2 \cdot m + 10 \cdot c \cdot m$. I tryckt text är konventionen att lutande stil betecknar enstaka variabler, så att flera lutande bokstäver i rad betecknar en produkt av motsvarande variabler. Enheter för meter, liter etc skrivs rakt, likaså bokstavskombinationer som är funktionsnamn eller liknande. T ex betecknar $\sin x$ funktionen sinus värde i punkten x, medan $sinx$ tolkas som $s \cdot i \cdot n \cdot x$; $2m + 10cm = 2 \cdot m + 10 \cdot c \cdot m$, medan 2 m+10 cm=210 cm.

Exempel. Här är några exempel på hur man med de vanliga räknereglerna kan förenkla algebraiska uttryck.

(a) $10m - 9y + 5y + 7m + 4y - m = (10 + 7 - 1)m + (-9 + 5 + 4)y = 16m + 0 \cdot y = 16m$

(b) $m - [a - b - (c - m)] = m - [a - b - c + m] = m - a + b + c - m = b + c - a$

(c) $3abc \cdot a^3bc^2 \cdot (-4b^2) = 3 \cdot (-4) \cdot a \cdot a^3 \cdot b \cdot b \cdot b^2 \cdot c \cdot c^2 = -12a^4b^4c^3$

(d) $(3x^2y^3z)^4 = 3^4 \cdot (x^2)^4 \cdot (y^3)^4 \cdot z^4 = 81x^8y^{12}z^4$

(e) $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

$$
\begin{aligned}
&= 2x \cdot (4x^2 - 6x + 9) + 3 \cdot (4x^2 - 6x + 9) \\
&= 2x \cdot 4x^2 - 2x \cdot 6x + 2x \cdot 9 + 3 \cdot 4x^2 - 3 \cdot 6x + 3 \cdot 9 \\
&= 8x^3 - 12x^2 + 18x + 12x^2 - 18x + 27 = 8x^3 + 27
\end{aligned}
$$

□

Vissa omskrivningar förekommer så ofta att man behöver kunna dem *aktivt*. Det räcker inte att veta att de finns och kunna slå upp dem i en formelsamling. För att kunna räkna ”med flyt” krävs en hel del utantillkunskap.

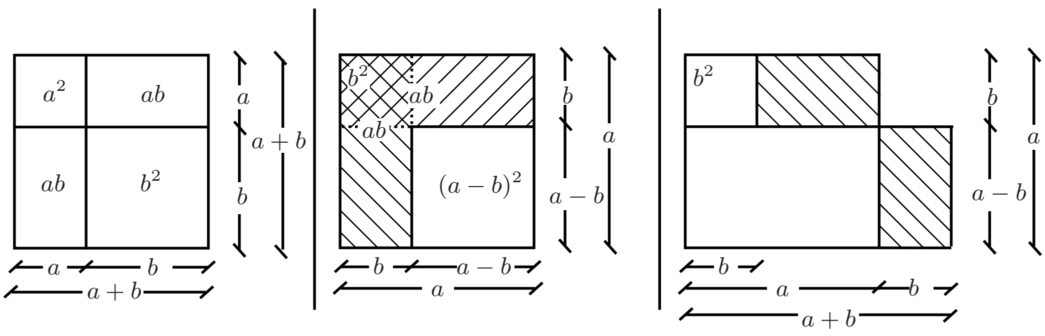
Följande viktiga identiteter behöver man kunna utantill:

Kvadreringsreglerna: $\begin{cases} (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 = (b-a)^2 \end{cases}$

Konjugatregeln: $a^2-b^2 = (a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$

Kuberingsreglerna: $\begin{cases} (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{cases}$

Faktoruppdelningarna: $\begin{cases} a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \end{cases}$



Figur 7: Illustration till kvadrerings- och konjugatreglerna

Exempel. Här följer först tre exempel på hur man kan använda reglerna för att utveckla en potens (d v s “öppna parenteserna”) och sedan tre exempel på det omvända då man faktoriserar ett uttryck (framställer det som produkt av enklare uttryck).

a $(3a+4b)^2 =$ [kvadreringsregeln] $= (3a)^2+2\cdot 3a\cdot 4b+(4b)^2 = 9a^2+24ab+16b^2$

b $(3+x^2)(x^2-3) = (x^2+3)(x^2-3) =$ [konjugatregeln] $= (x^2)^2-3^2 = x^4-9$

c $(x-2y)^3 =$ [kuberingsregeln]

$$= x^3-3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot (2y)^2-(2y)^3 = x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$$

d $4x^2-9a^4 = (2x)^2-(3a^2)^2 =$ [konjugatregeln] $= (2x+3a^2)(2x-3a^2)$

e $12x^4-2x^5-18x^3 =$ [alla gemensamma faktorer brytes ut]

$$= 2x^3\cdot(6x-x^2-9) = -2x^3(x^2-6x+9)$$
$$= \text{[kvadreringsregeln]} = -2x^3\cdot(x-3)^2$$

f $x^4+8xy^6 = x\cdot(x^3+8y^6) = x\cdot\left(x^3+(2y^2)^3\right)$

$$\begin{aligned}
&= \text{[enligt formeln för } (a^3+b^3)] = x\cdot(x+2y^2)(x^2-x\cdot 2y^2+(2y^2)^2) \\
&= x\cdot(x+2y^2)(x^2-2xy^2+4y^4)
\end{aligned}$$

□

Exempel. Här är ett par numeriska exempel på hur man kan använda räknereglerna. I de två första beräknas kvadraten av ett tal med enkla räkningar.

a $23^2 = (20+3)^2 = 20^2+2\cdot 20\cdot 3+3^2 = 400+120+9 = 529.$

b $29^2 = (30-1)^2 = 30^2-2\cdot 30\cdot 1+1^2 = 841.$

c $37^2-33^2 = (37-33)\cdot(37+33) = 4\cdot 70 = 280$

□

OBS: Uttrycket a^2+b^2 (liksom a^2+ab+b^2 och a^2-ab+b^2) kan **ej** faktoruppdelas (med reella tal).

En generalisering av formeln för a^3-b^3 är *allmänna konjugatregeln*.

$$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+a^{n-3}\cdot b^2+\cdots+a\cdot b^{n-2}+b^{n-1})$$

som visas genom att utveckla högra ledet.

1.8.1. Pascals triangel och $(a+b)^n$

Koefficienterna i utvecklingen av $(a+b)^n$ kan bestämmas med hjälp av **Pascals triangel**:

$n=0$						1						
1					1		1					
2				1		2		1				
3			1		3		3		1			
4		1		4		6		4		1		
5	1		5		10		10		5		1	
...	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o s v

Raden med $n=3$ ger kuberingsregeln

$$(a+b)^3 = 1\cdot a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+1\cdot b^3$$

och raden med $n = 5$ innebär att

$$(a+b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + 1 \cdot b^5$$

Ett tal i triangeln fås genom addition av de två tal, som står närmast snett ovanför[4]. För att inse att detta ger koefficienterna i utvecklingen kan vi titta på $(a+b)^4$. Vi har att $(a+b)^4 = (a+b) \cdot (a+b)^3$. Men $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Alltså är

$$(a+b)^4 = a \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + b \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3).$$

Man får en term a^3b ur båda produkterna, dels $b \cdot a^3$, dels $a \cdot 3a^2b$. Koefficienten för a^3b är alltså summan av koefficienterna för a^3 och a^2b.

Exempel. Här är tre ytterligare exempel på hur man använder Pascals triangel.

a $(a-b)^4 = (a+(-b))^4$

$$\begin{aligned} &= a^4 + 4a^3(-b) + 6a^2(-b)^2 + 4a(-b)^3 + (-b)^4 \\ &= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

b $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

c $(2a+b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2b + 3(2a)b^2 + b^3 = 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$ □

1.8.2. Rationella uttryck

Ett uttryck kallas rationellt om det är en kvot mellan två algebraiska summor av termer som i sin tur är produkter och heltalspotenser med positiv exponent av variabler, eventuellt med reella tal som koefficienter. Räkning med rationella uttryck följer samma räkneregler som räkning med rationella tal. Vid addition är det lämpligt att förlänga med ”så lite som möjligt”. Man bestämmer i så fall minsta gemensamma nämnare i stället för att ”multiplicera korsvis” på liknande sätt som vi gjorde för rationella tal. För att bestämma minsta gemensamma nämnare behöver man faktoruppdela de olika termernas nämnare. Primtalen här motsvaras av algebraiska uttryck som inte går att faktorisera reellt. I detta avsnitt arbetar vi med hjälp av kvadrerings-, kuberings- eller konjugatreglerna. Senare kommer vi även ta hjälp av faktorsatsen och polynomdivision.

Exempel. Här är ett antal exempel på omskrivningar av rationella uttryck. Notera att höger- och vänsterledet inte alltid är definierade för samma variabelvärden.

[4] Det finns även en allmän formel för koefficienterna i utvecklingen $(a+b)^n$. Det vore olyckligt att behöva skriva upp 999 rader i Pascals triangel för att ta reda på en koefficient man behöver i tusende raden.

(a) En användbar regel är

$$\frac{b-a}{c} = \frac{-(a-b)}{c} = -\left(\frac{a-b}{c}\right),$$

som ger att

$$\frac{b-a}{a^2-b^2} = -\left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right) = -\left(\frac{a-b}{(a-b)(a+b)}\right) = -\left(\frac{1}{a+b}\right)$$

(b) $\dfrac{30x^4y^7}{12xy^{10}} = \dfrac{2\cdot 3\cdot 5\cdot x^{4-1}}{2\cdot 2\cdot 3\cdot y^{10-7}} = \dfrac{5x^3}{2y^3} = \dfrac{5}{2}\cdot x^3\cdot y^{-3}$

(c) $\dfrac{x-y}{xy-x^2} = \dfrac{x-y}{x(y-x)} = -\left(\dfrac{y-x}{x(y-x)}\right) = -\dfrac{1}{x}$

(d) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)\div\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{b}{a^2}\right) = \dfrac{(a^2+b^2+2ab)}{ab}\div\dfrac{(a^2-b^2)}{a^2b}$

$$= \frac{(a^2+b^2+2ab)\cdot a^2b}{ab\cdot(a^2-b^2)} = \frac{(a+b)^2\cdot a}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a+b)a}{a-b}$$

(e) $\dfrac{5}{2x-2} - \dfrac{1}{3x} + \dfrac{3x+1}{1-x^2} =$ [faktoruppdela nämnarna] $=$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{2(x-1)} - \frac{1}{3x} - \frac{3x+1}{(x+1)(x-1)}\\
&= \text{[minsta gemensamma nämnare är } 2\cdot 3\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x-1)]\\
&= \frac{5\cdot 3x(x+1)}{2(x-1)\cdot 3x(x+1)} - \frac{1\cdot 2(x+1)(x-1)}{3x\cdot 2(x+1)(x-1)} - \frac{(3x+1)\cdot 2\cdot 3x}{(x+1)(x-1)\cdot 2\cdot 3x}\\
&= \frac{(15x^2+15x)-(2x^2-2)-(18x^2+6x)}{2\cdot 3\cdot x(x+1)(x-1)} = \frac{-5x^2+9x+2}{6x(x^2-1)}\\
&= -\left(\frac{5x^2-9x-2}{6(x^3-x)}\right)
\end{aligned}$$

□

1.8.3. Uttryck som innehåller rötter

Vid omskrivning av rotuttryck kan man givetvis använda alla de räkneregler som gäller för reella tal. Det man speciellt skall tänka på är att $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ om $a \geq 0$, och att $\sqrt{a^2} = |a|$ för alla reella a.

Exempel. Här är två exempel på förenklingar av rationella rotuttryck

a $\dfrac{3-c}{\sqrt{c-3}} = -\dfrac{c-3}{\sqrt{c-3}} = -\dfrac{\left(\sqrt{c-3}\,\right)^2}{\sqrt{c-3}} = -\sqrt{c-3}$ om $c > 3$.

Observera att uttrycket $\sqrt{c-3}$ är definierat om $c-3 \geq 0$, d v s om $c \geq 3$, men $1/\sqrt{c-3}$ är definierat endast om $c > 3$.

b $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+a^3}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2(1+a)}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{1+a}}$

$$= \frac{a}{|a|\sqrt{1+a}} = \begin{cases} 1/\sqrt{1+a} & \text{om} \quad a > 0, \\ -1/\sqrt{1+a} & \text{om} \quad -1 < a < 0. \end{cases}$$

OBS: Var uppmärksam på tecknet vid inmultiplicering i och utbrytning ur rotuttryck!

□

1.8.4. Övningar

1.8.1 Förenkla

a) $10t - 14u + 7v - t - 8v + 14u - 8v - u$

b) $70a + 20c + 33x + c - x - 28a - 40a - 9c + 41x$

1.8.2 Förenkla

a) $m + 2p - (m + p - r)$ b) $3c - (2a + c - 5b) - (2b - 2a)$

c) $7a - 2b - [(3a - c) - (2b - 3c)]$

1.8.3 Förenkla

a) $2xz^7 \cdot 10xz$ b) $a^2b^4c \cdot (-3ac^2) \cdot 9abc$

c) $-2p^2qr \cdot pq^7s^2 \cdot (-7qr^3)$

1.8.4 Förenkla

a) $(3x^2y)^3$ b) $(4ab^2c^3)^2(-2a^2b)^3$ c) $(a^2)^p \cdot (a^pb^{3p})^2 \cdot b^p$

1.8.5 Omforma (genom att multiplicera ihop parenteserna)

a) $(2x - y)(x + 2y)$ b) $(2x - y)(x + 2y)(x - y)$

c) $(a + x)(a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3 + x^4)$

d) $(x^2 - 2x + 3)(2 - 3x - 2x^2)$

1.8.6 Utveckla

a) $(3a - 4b)^2$ b) $(a^3 + 2b^2)^2$

c) $(m^4 + 4)^2 + (m^4 - 4)^2$

1.8.7 Förenkla

a) $(6 - x)(x + 6)$ b) $(a^2 + y)(a^2 - y)$

c) $(x^3 + 3)(x^3 - 3)(x^6 + 9)$

1.8.8 Utveckla

a) $(y+3x)^3$ b) $(3x+2y^2)^3$ c) $(x^4-6x)^3$

1.8.9 Uppdela i faktorer

a) x^2-a^4 b) $9x^4-25x^2$

c) $18x+81+x^2$ d) $x^4y+4x^2y^3-4x^3y^2$

e) x^4-x f) $3a^3+81b^3$

g) x^2-x^6 h) $54x^2y^7-16x^5y$

1.8.10 Utveckla

a) $(x-1)^5$ b) $(1-y)^7$ c) $(2x+a^2)^5$ d) $(xy^2-3z)^6$

1.8.11 Förenkla

a) $\dfrac{6a^7b^3c}{16ab^3c^3}$ b) $\dfrac{32x^ny^p}{36x^{n+1}y^{p-1}}$

c) $\dfrac{2ay+y^2}{2ay}$ d) $\dfrac{12x^2y^2+20xy^2-8x^2y}{4xy}$

1.8.12 Förenkla

a) $(2a+2b)/(b^2-a^2)$ b) $(x^2-4x^4)/(4x^2-4x+1)$

c) $(x-y)^3/(y-x)^5$ d) $(b^8-9)/(b^8-6b^4+9)$

e) $(a^3-b^3)/(b-a)^2$ f) $(a^3+1)/(a-a^2+a^3)$

g) $(x^4-16)/((x+2)(x^3-8))$

1.8.13 Förkorta (om möjligt)

a) $(a^3+b^3)/(a+b)$ b) $(a^4-b^4)/(a-b)$

c) $(a^4+b^4)/(a+b)$ d) $(a^5-b^5)/(b-a)$

1.8.14 Förenkla

a) $\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{y^2}{x}\right)\div\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y^2}\right)$

b) $\left(1-\dfrac{1}{x^4}\right)\div\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)$

c) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\dfrac{x+y}{x-y}-2+\dfrac{x-y}{x+y}\right)$

d) $\left(\dfrac{1/a}{b}-\dfrac{1/b}{a}+\dfrac{1}{2b/a}+\dfrac{2}{a/b}\right)\div\left(\dfrac{a^2+4b^2}{ab}\right)$

1.8.15 Skriv som ett bråk (på så enkel form som möjligt)

a) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x}$

b) $1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x^2-4x}$

c) $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{1-x^2}$

d) $\dfrac{1}{x^3-8}+\dfrac{1}{2x^2-8}+\dfrac{1}{8-4x}$

1.8.16 Förenkla och avgör för vilka värden på c som likheten gäller.

a) $\sqrt{c^2+4c+4}$

b) $c/\sqrt{c^2}$

c) $(\sqrt{c})^2/c$

d) $(c^2-9c)/\sqrt{9-c}$

e) $c/\sqrt{c^3-2c^2}$

f) $\sqrt{c^3+2c^2}/c$

2. Ekvationer

Vi börjar med att diskutera vad en ekvation är och vad det är för generella regler som gäller vid ekvationslösning. Vi tittar också på hur ekvationer kan dyka upp på ett naturligt sätt vid problemlösning. Lösningsmetoder för några typer av ekvationer kommer i de följande avsnitten.

En ekvation är helt enkelt en likhet som (i regel) innehåller en eller eventuellt flera obekanta variabler. Vi tar några enkla exempel.

Exempel. Likheten $21-x=x-3$ är en ekvation med en obekant x. Om det är en enda obekant i ekvationen så brukar man ofta av tradition använda bokstaven x, men det går lika bra med vilken bokstav (symbol) som helst. Likheten $g^2-g=1$ är en ekvation med en obekant som heter g.

Likheten $3x+2y=31$ är en ekvation som innehåller två obekanta x och y.

Likheten $8=5+3$ är en ekvation som inte innehåller några obekanta utan enbart tre mycket bekanta heltal. □

Det är inte ovanligt att begreppen ekvation, formel och funktion blandas ihop. En ekvation beskriver ett samband. Detta samband kan vara uppfyllt för alla tillåtna variabelvärden, i så fall talar man om en *identitet*. I annat fall är man ofta intresserad av de specifika variabelvärden för vilka sambandet uppfylls, d v s man är intresserad av att *lösa ekvationen*. En formel är ett uttryck som oftast innehåller symboler (variabler) och i vilket man kan sätta in olika variabelvärden. Funktionsbegreppet diskuteras ingående senare i kursen. Här kan vi nöja oss med att säga att en funktion kan ges av en formel, men behöver inte göra det, och att en ekvation ofta har formen $f=g$, där f och g är funktioner.

Nedan listar vi några ord som på ett naturligt sätt hör samman med begreppen ekvation, formel och funktion:

ekvation: sätta in, obekant, lösa, lösa ut, lösning, lösningsmängd, rot, falsk rot, ekvivalenta;

formel: variabel, sätta in;

funktion: sätta in, variabel, värde, funktionsvärde, beräkna, nollställe, graf.

Givet en ekvation med en obekant x säger vi att talet a är *en lösning* till ekvationen om ekvationen omvandlas till en sann likhet mellan tal då vi sätter in $x=a$. Att *lösa* en ekvation innebär att bestämma dess lösningsmängd, d v shitta alla dess lösningar, eller motivera att lösning saknas om så skulle vara fallet. Ofta är man intresserad av alla lösningar inom en viss talmängd, t ex alla reella lösningar, alla positiva lösningar, alla heltalslösningar etc. Om inget annat sägs letar vi efter reella lösningar.

Exempel. Talet 12 är lösning till ekvationen $21-x=x-3$, eftersom $21-12=12-3=9$.

Talet 2 är lösning till ekvationen $2x^4-x^3-2x^2-2x-12=0$, därför att $2\cdot 2^4-2^3-2\cdot 2^2-2\cdot 2-12=32-8-8-4-12=0$. Genom att konstatera detta har vi dock inte löst ekvationen, eftersom den har fler lösningar. Vi har inte ens löst ekvationen i $\mathbb{R}$ då det finns en reell lösning till, nämligen $-\dfrac{3}{2}$. Däremot är 2 den enda lösningen i $\mathbb{Z}$.

Talet $a\pi$ är en lösning till ekvationen $\sin x=0$ om och endast om (precis när) $a\in\mathbb{Z}$.

Ekvationen $x^2+2=0$ saknar reella lösningar, eftersom $x^2\geq 0$ för alla reella x.

Ekvationen $x^2+2x+1=(x+1)^2$ är en identitet, d v s dess lösningsmängd är hela $\mathbb{R}$.
$\square$

När man inte har metoder för att lösa en ekvation får man nöja sig med att visa att det finns (alternativt inte finns lösningar), att det finns ett visst antal lösningar, att de har vissa egenskaper etc. Ibland visar sig detta vara tillräckligt, t ex kan det räcka med att veta att en ekvation har en enda lösning och att denna är positiv, utan att man är så intresserad av exakt vad lösningen är. En sak som man ofta gör är att lokalisera lösningarna, d v s bestämma relativt små intervall som innehåller varsin lösning. Vid behov kan man sedan använda numeriska metoder för att få närmevärden.

Givet en ekvation med två obekanta x,y säger vi att talparet (a,b) är *en lösning* till ekvationen om ekvationen omvandlas till en sann likhet mellan tal då vi sätter in $x=a,\ y=b$. Att *lösa* en ekvation innebär återigen att hitta alla lösningar, eller motivera att lösning saknas om så skulle vara fallet.

Exempel. Talparet $(1,14)$ är en lösning till ekvationen $3x+2y=31$, eftersom $3\cdot 1+2\cdot 14=3+28=31$. Ekvationen har oändligt många lösningar, talparet (x,y), där $x=a,\ y=\dfrac{31-3a}{2}$, är en lösning för alla reella a. (Om vi låter x stå kvar som variabelnamn och skriver $y=\dfrac{31-3x}{2}$, säger man att man *löst ut y i termer av x*, eller *med hjälp av x*). $\square$

Två ekvationer kallas *ekvivalenta* om de har exakt samma lösningsmängd.

Exempel. Ekvationerna $x-1=0$ och $(x-1)^2=0$ är ekvivalenta, eftersom båda har en enda lösning, $x=1$.

Ekvationerna $x^2=-1$ och $\sin x=2$ är ekvivalenta i $\mathbb{R}$, eftersom båda saknar reella lösningar.

Ekvationerna $x(x-1)=x$och $x-1=1$ är *inte* ekvivalenta. Den andra har som enda lösning $x=2$, medan den första har lösningarna $x_1=0,\ x_2=2$.

Ekvationerna $x-1=1$ och $(x-1)^2=1$ är *inte* ekvivalenta. Den första har lösningsmängden $\{2\}$, medan den andra har lösningsmängden $x_1=0,\ x_2=2$. $\square$

I ett av exemplen visade det sig att man tappar en rot vid förkortning med x. Det sista exemplet visar att en ekvation som fås ur en annan medelst kvadrering inte nödvändigtvis är ekvivalent med den givna. I den kvadrerade ekvationen dök en s k falsk rot upp. Det är mycket viktigt att känna till vilka operationer man får utföra över en ekvation så att dess lösningsmängd bevaras, och minst lika viktigt att veta vilka operationer som kan leda till förlust av lösningar, alternativt uppkomst av falska lösningar.

Operationer som alltid leder till en ekvation ekvivalent med den givna är:

1. addera av samma tal/uttryck till båda sidor av likheten;
2. multiplikation/division av båda leden med ett tal/uttryck *skilt från 0*;
3. förenkling av de två sidorna av likheten var för sig.

Vanliga operationer som kan leda till förlust av lösningar, alternativt uppkomst av falska lösningar, är:

1. förlängning/förkortning med uttryck *som skulle kunna vara lika med 0*;
2. kvadrering av båda leden.

Ett sätt att gardera sig mot falska lösningar är att sätta in de kandidater till lösningar man fått i den ursprungliga ekvationen och helt enkelt kontrolera att den verkligen omvandlas till en sann likhet. Det är svårare att gardera sig mot förlust av lösningar. Vi återkommer till ämnet i senare avsnitt.

Vad ska man då ha ekvationer till? En ekvation använder man alltså till att beskriva ett samband. Ofta innehåller den någonting som är obekant och i många fall är målet just att bestämma vad denna obekanta storlek är. I andra fall beskriver ekvationen något objekt, så t ex är $y = 2x + 3$ ekvationen för en rät linje, d v s punkterna med koordinater lösningarna (x, y) till denna utgör en linje. Vi tar en titt på några exempel på problem som man kan ha nytta av en ekvation för att lösa.

Exempel. Kal har en storasyster som heter Ada. Skillnaden på dem i ålder är lika många år som Kal fyllde för 3 år sedan. Ada är 21 år gammal. Hur gammal är Kal?

Lösning. Vi betecknar Kals nuvarande ålder med x. Skillnaden mellan deras ålder är då $21 - x$ och för 3 år sedan fyllde Kal $x - 3$. En ekvation som beskriver sambandet är alltså $21 - x = x - 3$. □

Exempel. Vi söker nu ett tal med den "magiska" egenskapen att om man ifrån kvadraten av talet subtraherar talet själv så får man exakt 1. Vilket är talet?

Lösning. Vi betecknar det okända talet med g. Subtrahera talet själv ifrån kvadraten av talet är $g^2 - g$ och detta skulle bli 1. Alltså får vi ekvationen $g^2 - g = 1$. □

Exempel. Beda är i godisaffären för att köpa lördagsgodis. Hon köper 3 likadana chokladkakor och 2 likadana tablettaskar. Hon betalar 31 kronor. Hur mycket kostar chokladkakorna respektive tablettaskarna per styck?

Lösning. Vi betecknar priset på chokladkakan med x och priset på en tablettask med y. Det totala priset på Bedas lördagsgodis blir då $3x+2y$. Hon betalade 31 kronor så vi får alltså ekvationen $3x+2y=31$. $\square$

2.1 Förstagradsekvationer

Vi ska nu titta på hur man löser s k *linjära ekvationer*.

Man säger att en ekvation är *linjär* de obekanta endast förekommer som förstagradstermer, d v s om det enda man gjort med de obekanta är att man multiplicerat dem med tal och sedan adderat eller subtraherat de olika termerna med varandra och med tal. Linjära ekvationer kallas också för förstagradsekvationer.

Exempel. Ekvationen $21-x=x-3$ är linjär för den enda obekanta variabeln x har bara adderats och subtraherats med tal. Samma sak gäller för $3x+2y=31$ där de två obekanta bara multiplicerats med tal.

Däremot är ekvationen $g^2-g=1$ inte linjär då den obekanta variabeln g här har multiplicerats med sig själv. Inte heller ekvationen $xy=1$ är linjär då man här multiplicerat de två obekanta med varandra. $\square$

Linjära ekvationer är det enklaste som finns att lösa. Vi börjar med att titta på linjära ekvationer med 1 obekant som vi (av tradition) kallar x. Strategin är enkel: samla alla termer som innehåller x på en sida och alla tal på den andra.

Exempel. Vi löser ekvationen $21-x=x-3$:

$$21-x=x-3 \iff (21-x)+x=(x-3)+x \iff 21=2x-3 \iff$$

$$21+3=(2x-3)+3 \iff 24=2x \iff \frac{24}{2}=\frac{2x}{2} \iff 12=x.$$

Här betyder dubbelpilen $\iff$ att ekvationerna är ekvivalenta, d v s har exakt samma lösningsmängd. Vi ser alltså att den givna ekvationen har en enda lösning, nämligen $x=12$. (Därmed vet vi alltså att Kal ifrån exemplet i förra avsnittet är 12 år gammal.)

Vi löser nu ekvationen $21+x=x-3$:

$$21+x=x-3 \iff (21+x)-x=(x-3)-x \iff 21=-3.$$

Här försvann x och kvar fick vi bara orimligheten $21=-3$. Inget x i världen kan få den likheten att gälla, alltså saknar ekvationen lösning.

Avslutningsvis löser vi ekvationen $12-(x-3)=15-x$:

$$12-(x-3)=15-x \iff 12-x+3=15-x \iff 15-x=15-x \iff 15=15.$$

Denna sista likhet gäller uppenbarligen alltid, så till denna ekvation är vilket reellt tal x som helst en lösning. Den har alltså oändligt många lösningar. $\square$

Vi såg i exemplet ovan att en linjär ekvation med 1 obekant kunde ha 1, 0 eller oändligt många lösningar. Vi ska visa att detta faktiskt är de enda möjligheterna som finns. En linjär ekvation med en obekant kan alltid förenklas till formen $ax = b$. Om $a \neq 0$ är det enda talet som satisfierar ekvationen $x = \frac{a}{b}$, d v s ekvationen har som det heter *unik* lösning. Om $a = 0$ och $b = 0$ så är varje reellt tal lösning till ekvationen, eftersom $0 \cdot x = 0$ för alla reella x. I det fallet har ekvationen oändligt många lösningar. Den sista möjligheten är att $a = 0$, men $b \neq 0$. I det fallet finns ingen lösning, eftersom$ax = 0 \cdot x = 0 \neq b$ för alla reella x.

Vi ska nu titta på en linjär ekvation med fler än 1 obekant. Här blir strategin att välja ut en av variablerna att lösa ut (få ensam på ena sidan) på samma sätt som vi gjorde med x ovan.

Exempel. Vi löser ekvationen $3x + 2y = 31$ genom att lösa ut y:

$$3x + 2y = 31 \iff (3x + 2y) - 3x = 31 - 3x \iff 2y = 31 - 3x \iff y = \frac{31 - 3x}{2}.$$

Här ser vi att för varje x vi väljer så får vi precis ett y nämligen $y = (31 - 3x)/2$. Vi får alltså oändligt många lösningar. Två av dessa är $x = 5, y = 8$ och $x = 6, y = 13/2$. (Vi påminner om att talparet $x = 5, y = 8$ är *en* lösning.)

Denna ekvation var ju den vi fick i förra avsnittet då Beda köpte ett antal chokladkakor och tablettaskar. Vi ser nu när vi löser ekvationen att det inte finns unik lösning och därför räcker inte informationen till att räkna ut vad godiset kostar per styck. $\square$

Om man har en linjär ekvation med fler än 1 obekant så får man alltid oändligt många lösningar (eller ingen lösning alls om alla obekanta försvinner vid förenkling).

2.1.1 Övningar

2.1.1 Lös följande ekvationer.

a) $3(2 - x) = -(1 + 2x)$

b) $3(5 - 3x) - 2(4 - x) = 10$

c) $3(5 - 3x) - 2(4 - x) = 7 - 7x$

d) $3(5 - 3x) - 2(4 - x) = 6 - 7x$

e) $\frac{2}{3}x - \frac{5}{6} = 0$

f) $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + 2\right) = \frac{2}{3}$

2.1.2 Lös ut y i följande ekvationer.

a) $3(2-x)=-(1+y)$ b) $3(5-3y)-2(4-x)=10+2y$

2.2 Andragradsekvationer

En andragradsterm är en term i vilken den/de obekanta multiplicerats med varandra och med tal så att det sammanlagda gradtalet är två, t ex är $2x^2$, $3xy$, z^2 andragradstermer, medan xy^2, x^2y^2 inte är det. En ekvation i vilken den/de obekanta förekommer endast som första- och andragradstermer kallas en *andragradsekvation*. I det här avsnittet ska vi arbeta med andragradsekvationer med en obekant.

Även andragradsekvationer förenklas genom att man adderar eller subtraherar samma tal till båda sidor av ekvationen, multiplicerar eller dividerar båda leden med tal ($\neq 0$), eller gör omskrivningar. Syftet med förenklingarna och omskrivningarna är att få en ekvation som man klarar av att lösa och som är ekvivalent med den givna.

De enda andragradsekvationerna man kan lösa direkt är de som hör till den enklaste typen, $x^2 = d$ där d är ett positivt tal. Vi har ju att $\sqrt{d}$ är det positiva tal vars kvadrat är d, $(\sqrt{d})^2 = d$ om $d > 0$. Eftersom det också gäller att $(-\sqrt{d})^2 = d$ så har ekvationen de två lösningarna $\sqrt{d}$ och $-\sqrt{d}$. Att det inte kan finnas fler lösningarna återkommer vi till lite längre fram. T ex har ekvationen $x^2 = 9$ de två lösningarna $x_1 = \sqrt{9} = 3$ och $x_2 = -3$. Om d skulle vara lika med 0, får vi endast lösningen $x = 0$.

Exempel. Förhållandet mellan de två sidorna i en rektangel är 2:3. Om kortsidan är 10 m är alltså långsidan 15 m. Vi skall bestämma sidlängderna då arean är 54 m^2.

Lösning. Om kortsidan är $2a$ m så är långsidan $3a$ m och arean $6a^2$ m^2. Alltså skall a vara lösning till $6a^2 = 54$. Division med 6 ger $a^2 = 9$ vars lösningar är 3 och -3. Endast positiva lösningen kan vara relevant så rektangelsidorna är 6 respektive 9 m. $\square$

Vi klarar nu också av att lösa andragradsekvationer av typen $(x-s)^2 = d$ där d är ett positivt tal. Här är $x-s$ ett tal vars kvadrat är d. Då är $x-s = \sqrt{d}$ eller $x-s = -\sqrt{d}$. Lösningarna till $(x-s)^2 = d$ är således

$$x_1 = s + \sqrt{d} \text{ och } x_2 = s - \sqrt{d}.$$

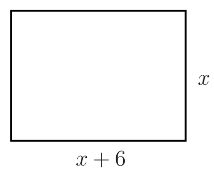
Exempel. Ekvationen $(x-2)^2 = 9$ har de två lösningarna som ges av $x-2 = \sqrt{9} = 3$ och $x-2 = -\sqrt{9} = -3$. Alltså är $x_1 = 5$ och $x_2 = -1$. $\square$

Exempel. Långsidan i en rektangel är 6 meter längre än kortsidan. Bestäm sidlängderna då arean är 55 m^2.

Lösning.

Antag att kortsidan är x m. Då är långsidan $x+6$ m och arean $x(x+6)$ m^2. Vi söker således en lösning till ekvationen $x(x+6) = 55$. Utveckling ger

$$x(x+6) = 55 \Longleftrightarrow x^2 + 6x = 55.$$



Figur 8: Rektangel med sidorna x och $x+6$

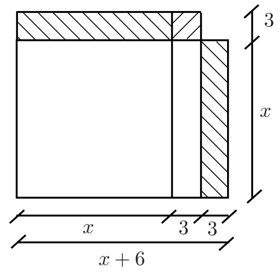
Genom att addera 9 till vänsterledet x^2+6x blir uttrycket en jämn kvadrat

$$x^2+6x+9 = x^2+2\cdot 3x+3^2 = (x+3)^2.$$

Vi adderar därför 9 till båda sidor av ekvationen och får

$$\begin{aligned} x(x+6)=55 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2+6x=55 \Longleftrightarrow x^2+6x+9=55+9 \Longleftrightarrow (x+3)^2=64 \\ &\Longleftrightarrow \quad x+3=8 \ \text{ eller } \ x+3=-8 \Longleftrightarrow x=5 \ \text{ eller } \ x=-11. \end{aligned}$$

Eftersom endast positiv lösning är möjlig så får vi $x=5$. Sidorna är med andra ord 5 respektive 11 m. □



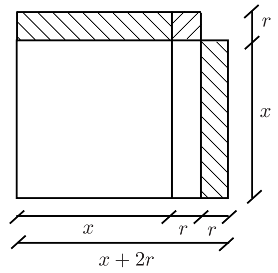
Figur 9: En kvadrat med sida 3 läggs till

Metoden i det sista exemplet kallas *kvadratkomplettering*. Genom att addera en kvadrat med arean 9 m^2 gör vi om rektangeln till en kvadrat med sidan $x+3$. Rektangeln har arean 55 m^2, kvadraten har arean 64 m^2.

På samma sätt kan man kvadratkomplettera alla andragradsuttryck. Uttrycket

$$x^2+2rx = x(x+2r)$$

kan ses som arean av en rektangel med sidorna x och $x+2r$. Genom att addera en kvadrat med sidan r erhåller man en kvadrat med sidan $x+r$.



Figur 10: En kvadrat med sida r läggs till

Rent algebraiskt betyder kvadratkomplettering att vi, givet ett uttryck på formen x^2+bx, försöker hitta ett tal vi kan addera, så att summan blir en jämn kvadrat. Eftersom $(x+s)^2 = x^2+2sx+s^2$, får vi att $2s$ måste vara lika med b och rätt tal att addera är $\dfrac{b^2}{4}$.

Med hjälp av kvadratkomplettering härleder vi nu en välkänd formel för lösningarna till vilken andragradsekvation som helst. Vi ska först titta på ekvationer där koefficienten framför x^2 är lika med 1.

$$\begin{aligned}
x^2+px+q=0 \quad &\iff \quad x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x=-q \\
&\iff \quad x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \\
&\iff \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \\
&\iff \quad x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \text{ eller } x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}
\end{aligned}$$

som ger:

> Andragradsekvationen $x^2+px+q=0$ har för $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\geq 0$ lösningarna
>
> $$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad \text{och} \quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Resultatet ovan har du säkert använt många gånger. Ofta skrivs det med *en* formel:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Den är inte svår att memorera, men minnet blir lätt diffust efter ett tag. Därför är det betydligt bättre att kunna kvadratkomplettera och på det viset komma fram till lösningen utan att använda formeln. Kvadratkomplettering är dessutom en metod som används i flera andra sammanhang och har ett värde i sig. Tecknet $\pm$ är praktiskt vid kalkyler men man bör alltid ange de två rötterna separat.

Exempel. Vi löser två andragradsekvationer genom att använda formeln vi precis härledde.

a Ekvationen $x^2+6x+5=0$ har rötterna

$$x_{1,2}=-3\pm\sqrt{(-3)^2-5}=-3\pm\sqrt{9-5}=-3\pm\sqrt{4}=-3\pm 2$$

d v s $x_1=-3+2=-1$ och $x_2=-3-2=-5$.

b Om man vill använda formeln ovan när koefficienten framför x^2 inte är lika med 1 (men är skild från 0), måste man först dividera med den koefficienten.

Ekvationen $6+3x-4x^2=0$ har koefficenten -4 framför x^2, så för att använda formeln måste vi först dividera med -4 vilket ger

$$x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} = 0.$$

Denna har lösningarna

$$x_{1,2} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{2}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{3}{2}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9+96}{64}} = \frac{3}{8} \pm \frac{\sqrt{105}}{8}.$$

Alltså är $x_1 = (3+\sqrt{105})/8$ och $x_2 = (3-\sqrt{105})/8$. $\square$

Vi ska nu härleda en formel som ger andragradsekvationens lösningar i det allmänna fallet, samt diskutera hur man lätt kan bestämma antalet reella lösningar. Betrakta ekvationen

$$ax^2+bx+c=0, \quad \text{där } a \neq 0.$$

Division av båda leden med $a \neq 0$ och kvadratkomplettering ger ekvationen

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0,$$

som är ekvivalent med

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Uttrycket $D = b^2-4ac$ kallas *ekvationens diskriminant* och dess tecken avgör hur många reella lösningar den givna andragradsekvationen har. För att ekvationen ska ha reella lösningar måste högerledet ovan vara icke-negativt. Eftersom nämnaren $4a^2$ alltid är positiv, betyder det att ekvationen har reella lösningar om och endast om $D = b^2-4ac \geq 0$. Vi sammanfattar:

Andragradsekvationen $ax^2+bx+c=0$ har

två olika reella lösningar	om och endast om $D = b^2-4ac > 0$;
en reell lösning	om och endast om $D = b^2-4ac = 0$;
inga reella lösningar	om och endast om $D = b^2-4ac < 0$.

Låt oss titta igen på uttrycket vi fick genom att kvadratkomplettera

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

För $D \geq 0$ kan vi använda konjugatregeln för att faktorisera, och får att den givna andragradsekvationen är ekvivalent med

$$\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0.$$

Eftersom en produkt endast blir noll då en eller flera av faktorerna är lika med noll, kan vi avläsa andragradsekvationens lösningar. (Vi ser också att det inte kan finnas fler än två lösningar.)

Andragradsekvationen $ax^2+bx+c=0$ har för $D=b^2-4ac \geq 0$ de reella lösningarna

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{och} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

För $D > 0$ är de två reella lösningarna olika och den faktoriserade ekvationen har utseendet $(x-x_1)(x-x_2)=0$; för $D=0$ får vi samma lösning två gånger ($x_1=x_2$) och faktoriseringen ger $(x-x_1)^2=0$. Det finns anledning att betrakta den enda reella lösningen som två reella lösningar som råkar sammanfalla. Man säger att ekvationen för $D=0$ har en *dubbelrot*, eller, vilket är samma sak, att x_1 i det fallet har *multiplicitet två*.

Om man får en ekvation där faktoriseringen redan är gjord finns det ingen anledning att utveckla uttrycket för att sedan använda kvadratkomplettering eller någon lösningsformel. Man kan i det fallet avläsa lösningarna direkt.

Exempel. Ekvationen $(x-1)(x+3)=0$ har de två lösningarna $x_1=1$ och $x_2=-3$. Detta förklaras alltså av att en produkt av två tal är 0 om minst ett av talen är 0, men inte annars. Produkten $(x-1)(x+3)$ är 0 precis då $x-1=0$ eller $x+3=0$ vilket ger de två lösningarna.

På samma sätt ser vi att ekvationen $x^2+px=0$ har de två lösningarna $x_1=0$ och $x_2=-p$, eftersom $x^2+px=x(x+p)$. □

Notera att ur faktoriseringen följer

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

2.2.1 Övningar

2.2.1 Lös ekvationerna

a) $x^2+3x-4=0$ b) $3+2x-x^2=0$ c) $2x^2=3+x$

d) $3x+7x^2=0$ e) $4x^2+9=12x$ f) $5x^2+3x=1$

2.2.2 Kvadratkomplettera

a) x^2+4x+1 b) $4x^2-36x+100$ c) $3-12x-x^2$

2.2.3 Faktoruppdela (med reella tal)

a) x^2+x-6 b) $8-6x-2x^2$

c) x^2-x-1 d) x^2+x+1

2.2.4 Bestäm en andragradsekvation med rötterna

a) 2 och -5 b) $-\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{3}$ c) $1+\sqrt{5}$ och $1-\sqrt{5}$

2.3 Ekvationer som leder till andragradsekvationer

En del ekvationer kan överföras till en andragradsekvation genom en omskrivning av något slag. Det är dock viktigt att tänka sig för när man gör omskrivningar. Som vi har noterat tidigare kan det nämligen inträffa både att man skapar nya *falska* lösningar (*falska* rötter) och att man tappar bort lösningar.

Om en ekvation multipliceras med en faktor, som innehåller den obekanta variabeln, kan man få nya lösningar. Ekvationen $(x-1)(x-2)=0$ har lösningarna $x_1=1$ och $x_2=2$. Om vi multiplicerar med $x-3$ får vi ekvationen $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ som har ytterligare en, nämligen $x_3=3$.

På samma sätt leder ofta division till att lösningar tappas bort. Ekvationen $x^2+4x=0$ har lösningarna $x_1=0$ och $x_2=-4$. Division med x leder till ekvationen $x+4=0$, lösningen $x_1=0$ har tappats bort.

Det är därför viktigt att pröva de erhållna rötterna i den givna ekvationen och, naturligtvis, tänka sig noga för då man dividerar med en faktor som innehåller den obekanta. Man ska alltid ställa sig frågan: När är det jag dividerar med lika med 0? Ett gott råd är att inte förkorta med annat än kända tal, inte obestämda bokstavsuttryck. Om man se en gemensam faktor i alla termer kan man istället flytta över alla termer till ena ledet och bryta ut den gemensamma faktorn.

För ekvationer som innehåller rationella uttryck är det en bra idé att skriva alla uttryck med minsta gemensamma nämnare. Om man förlänger med den gemensamma nämnaren gäller det att vara medveten om att detta kan introducera falska rötter.

Exempel. Vi löser ekvationen $x - \dfrac{8}{x+2} = 0$.

Lösning. Ekvationen innehåller ett rationellt uttryck och vi multiplicerar därför med nämnaren $x+2$. Lösningarna till den nya ekvationen $x(x+2)-8=0$ bestäms med kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned} x(x+2)-8=0 &\iff x^2+2x=8 \iff x^2+2x+1=9 \\ &\iff (x+1)^2=9 \iff x_{1,2}=-1\pm 3. \end{aligned}$$

Lösningarna är alltså $x_1 = 2$ och $x_2 = -4$. Vi prövar dessa i ursprungsekvationen och finner att båda är korrekta. (Eftersom vi multiplicerade med $x+2$ är enda möjliga falska roten -2. Kontrollen var logiskt sett överflödig, men man bör *alltid* kontrollera genom insättning. Det är också ett sätt att upptäcka räknefel.) □

Vissa ekvationer, som innehåller rottecken kan överföras till en andragradsekvation genom att de båda leden kvadreras, eventuellt upprepade gånger. Detta bygger på att om a och b är positiva tal och $b = \sqrt{a}$ så är $b^2 = a$. Notera att om b är ett negativt tal och $b = -\sqrt{a}$ så är också $b^2 = a$. Den kvadrerade ekvationen *kan* därmed ha fler lösningar än den givna.

Exempel. Vi löser ekvationen $\sqrt{2x+143} = x$.

Lösning. Vi noterar först att eftersom $\sqrt{2x+143} \geq 0$ så måste $x \geq 0$. Båda leden kvadreras. Den nya ekvationen $2x+143 = x^2$ skrivs om till

$$x^2 - 2x - 143 = 0.$$

Denna har lösningarna $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{144} = 1 \pm 12$. Roten $x_1 = 13$ är rot till givna ekvationen eftersom $\sqrt{2\cdot 13+143} = \sqrt{169} = 13$. Däremot är $x_2 = -11$ en *falsk rot*, eftersom vi redan från början noterade att det är nödvändigt att $x \geq 0$. Denna falska rot fås p g a kvadreringen och är lösning till $\sqrt{2x+143} = -x$. □

Exempel. Vi löser ekvationen $1 + \sqrt{x^2+5} = 2x$.

Lösning. För att vid kvadrering bli av med ett rotuttryck så måste detta vara ensamt på ena sidan i ekvationen. Vi skriver därför ekvationen som $\sqrt{x^2+5} = 2x-1$ (och noterar att eventuella lösningar måste uppfylla $2x-1 \geq 0$). Kvadrering ger $x^2+5 = (2x-1)^2$ som utvecklas till $x^2+5 = 4x^2-4x+1$, d v s

$$3x^2 - 4x - 4 = 0.$$

Lösningarna är $x_1 = 2$ och $x_2 = -2/3$. Nu måste prövning ske genom insättning i den givna ekvationen, eller *hellre* genom prövning i ekvationen $\sqrt{x^2+5} = 2x-1$, varvid *endast tecknet behöver prövas*, eftersom $q^2 = p \iff q = \sqrt{p}$ eller $q = -\sqrt{p}$:

För $x_1 = 2$ får vi *högerledet*

$$HL = 2x - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0,$$

så $x_1 = 2$ *är* en lösning till den givna ekvationen. För att upptäcka eventuella räknefel kan vi kontrollera även vänsterledet. Vi får

$$VL = \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3$$

vilket bekräftar att $x_1 = 2$ är en lösning till den givna ekvationen.

För $x_2 = -2/3$ får vi

$$HL = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 1 < 0,$$

alltså är $x_2 = -2/3$ en falsk rot.

Svar: Ekvationen har roten $x_1 = 2$. □

Flera olika typer av ekvationer, t ex fjärdegradsekvationer som saknar x- och x^3-termer, vissa ekvationer som innehåller rotuttryck och en del andra, kan överföras till andragradsekvationer med lämpliga *substitutioner*.

> En fjärdegradsekvation som saknar x- och x^3-termer, d v s en ekvation på formen
> $$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$
> kan med substitutionen $x^2 = t$ överföras till en andragradsekvation för t
> $$at^2 + bt + c = 0.$$

För varje icke-negativ lösning t till denna andragradsekvation får vi för fjärdegradsekvationen de reella lösningarna $x_{1,2} = \pm\sqrt{t}$, ty $x^2 = t$.

Exempel. Vi löser ekvationen $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$.

Lösning. Sätt $x^2 = t$. Då fås $t^2 - 20t + 64 = 0$ som har lösningar

$$t_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6, \text{ d v s } t_1 = 16 \text{ och } t_2 = 4.$$

Eftersom vi satte $t = x^2$, så får vi att $x^2 = t_1 = 16$ ger $x_1 = 4$ och $x_2 = -4$, samt att $x^2 = t_2 = 4$ ger $x_3 = 2$ och $x_4 = -2$. Ekvationen $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ har alltså fyra reella lösningar och de är $4, -4, 2$ och -2. □

Ibland är det enklast att lösa en ekvation som innehåller rottecken med hjälp av en substitution.

Exempel. Vi löser ekvationen $x+\sqrt{x}=6$.

Lösning. Sätt $\sqrt{x}=t$. Då fås $t^2+t=6$ vars lösningar är

$$t_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{-1\pm 5}{2},\ \text{ så }\ t_1=2\ \text{ och }\ t_2=-3.$$

Vi satte $t=\sqrt{x}$, så $\sqrt{x}=t_1=2 \Rightarrow x=4$, medan $\sqrt{x}=t_2=-3$ är orimligt. Den givna ekvationen har en enda lösning, $x=4$. □

2.3.1 Övningar

2.3.1 Lös ekvationerna.

a) $x+3=4\cdot x^{-1}$ b) $x+9x^{-1}=12$ c) $3+x^{-2}=x^{-1}$

2.3.2 Lös ekvationerna.

a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}=1$ b) $x+1+\dfrac{1}{x+1}=0$

2.3.3 Lös ekvationerna genom kvadrering.

a) $x-6=\sqrt{x}$ b) $x+1=\sqrt{x^2+5}$ c) $x-2=\sqrt{x^2-4x+5}$

d) $3+\sqrt{x^2-6x+9}=2x$ e) $x+2\sqrt{x}=8$

f) $\sqrt{x+132}=x$ g) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+6}-x=3$

h) $2x+\sqrt{x^2+x}=1$ i) $\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}$

2.3.4 Lös ekvationerna.

a) $x^4-7x^2+12=0$ b) $1225-74x^2+x^4=0$

c) $x^4-x^2-12=0$ d) $24x^2=72+2x^4$

e) $6x^4=7x^2+3$

2.3.5 Lös ekvationerna med substitution.

a) $x-6=\sqrt{x}$ b) $x+6\sqrt{x}=1$ c) $x+2=3\sqrt{x}$

2.4 Linjära ekvationssystem

Ett *ekvationssystem* är ett antal ekvationer med (oftast) flera obekanta som man vill lösa samtidigt, d v s man vill hitta alla värden för de obekanta som uppfyller alla ekvationer samtidigt. Precis som för enskilda ekvationer finns ett antal operationer som garanterat leder till ekvationssystem ekvivalenta med det givna, d v s ekvationssystem som har exakt samma lösningar som det givna. Dessa operationer är

1. Omkastning av två ekvationers ordningsföljd;
2. Multiplikation av en ekvation med tal skilt från 0;
3. Addition av en ekvation multiplicerad med ett tal till en annan ekvation.

Man kan använda sig av dessa operationer för att förenkla och omarbeta vilket ekvationssystem som helst. Det visar sig att de är tillräckliga för att lösa en speciell typ av ekvationssystem, nämligen *linjära* sådana. Ett ekvationssystem kallas *linjärt* om alla ekvationer det består av är linjära, d v s de obekanta förekommer endast i form av förstagradstermer.

När man skall lösa ett sådant system försöker man med hjälp av operationerna listade ovan skaffa sig en ekvation, som endast innehåller en obekant. När man väl har löst denna kan man sätta in värdet i en av ursprungsekvationerna och lösa för den andra obekanta, om det är två variabler. Om det är fler än två variabler får man upprepa förfarandet för en annan obekant. Metoden kallas *Gauss eliminationsmetod*, eller *eliminationsmetoden*.

Exempel. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 7x+3y=1. \end{cases}$$

Metod 1: (Substitutionsmetoden) Man kan lösa ut x i den första ekvationen och få

$$x=\frac{5-2y}{3}.$$

När man sätter in detta (substituerar) i den andra ekvationen får man

$$7\cdot\left(\frac{5-2y}{3}\right)+3y=1 \iff 35-14y+9y=3 \iff 32=5y$$

och därmed $y=32/5$ och $x=(5-2y)/3=-13/5$.

Metod 2: (Eliminationsmetoden) Multiplicera (för att eliminera x) de givna ekvationerna med 7 respektive -3 och addera den nya första ekvationen till den nya som är på andra plats:

$$\begin{cases} \;\;21x + 14y = 35 \\ \underline{-21x - 9y = -3} \end{cases}$$
$$5y = 32$$

Här får man $y = 32/5$, som insatt i en av de givna ekvationerna (vilken som helst) ger $x = -13/5$.

Svar: Vi får lösningen $x = -13/5$ och $y = 32/5$

□

Anmärkning 1. Eliminationsmetoden är att föredra, eftersom den leder till mer systematiska lösningar och är enkel att använda även för mycket stora linjära ekvationssystem, d v s ekvationssytem som består av många linjära ekvationer med många obekanta.

Exempel. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4x + \;\; y + 2z = 1 \\ \;\; x + 4y + \;\; z = -1 \\ 3x + 2y + \;\; z = 3. \end{cases}$$

Vi inleder med att låta ekvationer 1 och 2 byta plats; sedan elimineras x ur alla ekvationer utom den nya första genom att man multiplicerar den nya första ekvationen med (-4) och adderar till den nya andra ekvationen, samt med (-3) och adderar till den tredje:

$$\begin{cases} 4x + \;\; y + 2z = 1 \\ \;\; x + 4y + \;\; z = -1 \\ 3x + 2y + \;\; z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + \;\; z = -1 \\ \;\; -15y - 2z = 5 \\ \;\; -10y - 2z = 6. \end{cases} .$$

Nu multiplicerar vi den tredje ekvationen med $-\dfrac{1}{2}$ och låter den byta plats med den andra:

$$\begin{cases} x + 4y + \;\; z = -1 \\ \;\; -15y - 2z = 5 \\ \;\; -10y - 2z = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + \;\; z = -1 \\ \;\; 5y + \;\; z = 3 \\ -15y - 2z = 5. \end{cases} .$$

Vi kan nu eliminera y ur den sista ekvationen genom att multiplicera den andra med 3 och addera till den sista:

$$\begin{cases} x + 4y + \;\; z = -1 \\ \;\; 5y + \;\; z = -3 \\ -15y - 2z = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + \;\; z = -1 \\ \;\; 5y + \;\; z = -3 \\ \;\; z = -4. \end{cases} .$$

Ur den sista ekvationen får vi att $z = -4$. Vi sätter in i den andra och får att $y = \frac{-3+4}{5} = \frac{1}{5}$. Slutligen sätter vi in värdena för y och z i den första ekvationen och får att $x = \frac{11}{5}$. $\square$

Anmärkning 2. I det första exemplet ovan gäller att:

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 7x+3y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+2y=5 \\ \phantom{3x+{}}5y=32 \end{cases}$$

där det högra ekvationssystemet är *triangulärt*, d v s koefficienterna för x och y som är skilda från noll bildar en triangel. När ett system är triangulärt, så är en av de obekanta redan eliminerad i sista ekvationen, så systemet är förberett för lösning. I det andra exemplet eftersträvades också en triangulär form, även kallad *trappstegsform*.

Anmärkning 3. Det spelar ingen roll vilken av variablerna man eliminerar först. Man kan börja med den som man tycker leder till de enklaste uttrycken. Variablerna kan ha andra namn än x och y, t ex är det vanligt att man använder sig av index om det handlar om stora ekvationssystem med många obekanta. I ett ekvationssystem med hundra obekanta heter de typiskt $x_1, x_2, \dots, x_{99}, x_{100}$.

Exempel. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 6x+4y=9. \end{cases}$$

Lösning. Multiplicera (för att eliminera x) den första ekvationen med -2 och addera till den andra:

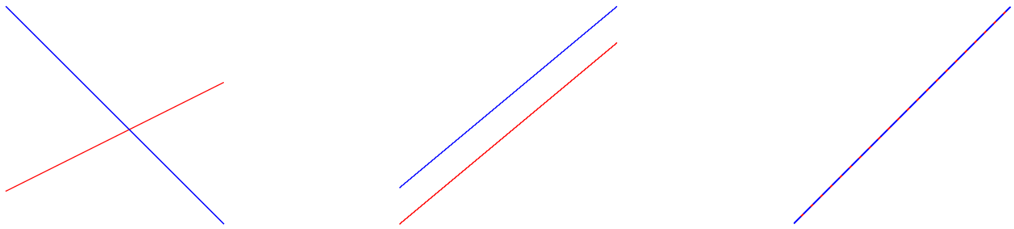
$$\begin{array}{rcl} -6x-4y & = & -10 \\ 6x+4y & = & 9 \\ \hline 0 & = & -1 \end{array}.$$

Här får vi en motsägelse som betyder att ekvationssystemet saknar lösning. $\square$

Anmärkning 4. Geometriskt motsvarar den linjära ekvationen $ax+by=c$ en *rät linje*. (Här är a, b, c fasta parameter och x, y variabler). Ett system av två sådana linjära ekvationer motsvarar alltså skärningspunkterna mellan två räta linjer. Detta har därmed

- *en* lösning om de räta linjerna är *skärande*,
- *ingen* lösning om de räta linjerna är *parallella* (och olika),

- *oändligt* många lösningar om de räta linjerna *sammanfaller*.



Hade vi istället betraktat ett linjärt ekvationssystem med tre ekvationer och två obekanta hade det rört sig om att hitta skärningspunkterna mellan tre räta linjer. Man förväntar sig inte att ett sådant ekvationssystem är lösbart. Det skulle dock också kunna ha en entydig lösning, om alla linjerna är olika och går genom en punkt, eller oändligt många lösningar, om de tre linjerna sammanfaller.

Det visar sig att ett linjärt ekvationssystem har ingen, en unik, eller oändligt många lösningar oavsett antalet ekvationer och obekanta.

2.4.1 Övningar

2.4.1 Lös ekvationssystemen.

a) $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 2x-y=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y=10 \\ x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 7x+5y=-4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 9x-6y=8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x+y=3 \\ 10x+2y=6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 15s+14t=59 \\ 12s-35t=1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 1/x+1/y=5/6 \\ 1/x-1/y=1/6 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 6x+5y+z=45 \\ 5x+2y-z=23 \\ 13x-7y+z=6 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x-y+z=20,1 \\ x+y-z=9,9 \\ 3x+2y+8z=30,4 \end{cases}$

j) $\begin{cases} a+2b+c=3 \\ a-b+2c=2 \\ 3a-2b+c=-3 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ 3x+y+2z=7 \\ 5x+4y+z=0 \end{cases}$

2.4.2 En person som tillfrågades om sin ålder svarade: ”För 9 år sedan var jag 26 gånger så gammal som min son, men om 2 år blir jag blott 4 gånger så gammal.” Hur gammal var han? (Du kan behöva räkna med halvår.)

2.5 Polynom, ekvationer av högre grad, faktorsatsen, polynomdivision

Ett *polynom* är en (ändlig) summa av termer på formen ax^n, där *koefficienten* a är ett tal, *exponenten* $n \geq 0$ ett heltal (med andra ord ett naturligt tal) samt x en variabel. Den högsta exponenten n med koefficienten skild ifrån 0 i ett polynom kallas för *graden av polynomet*. (Istället för x kan man förstås använda en annan variabel om man så vill.)

Vi låter $p(x)$ beteckna ett polynom och a ett tal. *Värdet i en punkt* a för polynomet är $p(a)$, d v s det tal vi får när vi ersätter x med a. Ett *nollställe* till polynomet är ett tal b sådant $p(b) = 0$.

Exempel. När vi löste andragradsekvationer så letade vi efter nollställen till uttryck på formen $ax^2 + bx + c$, d v s nollställen till polynom av grad 2. Uttrycket $x^4 + 3x^3 + x$ är ett polynom av grad 4.

Däremot är **inte** uttrycken $x^2 + x^{-1} + 1$ eller $x^2 + \sqrt{x} + 1$ några polynom, eftersom exponenten i den andra termen i båda fallen inte är ett naturligt tal. $\square$

Exempel. Låt $p(x) = x^2 + 3x + 2$. Värdet i 2 är då $p(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = 12$ och värdet i -1 är $p(-1) = (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 2 = 0$. Alltså är -1 ett nollställe till polynomet. $\square$

I avsnittet om andragradsekvationer insåg vi att x_1, x_2 är nollställen till polynomet $x^2 + px + q$ om och endast om $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$. Det finns ett generellt viktigt samband mellan nollställen till ett polynom och faktorer till polynomet. Följande sats är mycket viktig att behärska för att kunna arbeta med polynom.

> **Faktorsatsen**: Antag att $p(x)$ är ett polynom och a ett tal. Då är a ett nollställe till $p(x)$, d v s $p(a) = 0$, om och endast om $x - a$ är en faktor i $p(x)$, d v s om och endast om
> $$p(x) = (x - a) \cdot q(x),$$
> där $q(x)$ är ett polynom med grad ett mindre än $p(x)$.

Exempel. Vi såg i exemplet ovan att -1 är ett nollställe till polynomet $p(x) = x^2 + 3x + 2$. Enligt faktorsatsen vet vi därmed att

$$x^2 + 3x + 2 = (x - (-1)) \cdot q(x) = (x + 1) \cdot q(x),$$

där $q(x)$ är ett polynom av grad 2-1=1. Alltså är $q(x) = kx + m$ för några tal k och m. Vi kan räkna ut vad $q(x)$ är genom att utnyttja likheten

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= (x + 1) \cdot q(x) = (x + 1)(kx + m) \\ &= kx^2 + kx + mx + m = kx^2 + (k + m)x + m. \end{aligned}$$

Genom att identifiera koefficienterna för x^2 får vi $k = 1$ och om vi identifierar konstanterna så får vi $m = 2$. En extra kontroll får man genom att man ser att koefficienterna för x är 3 respektive $k+m = 1+2 = 3$. Alltså är

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2),$$

och alltså är också -2 ett nollställe till polynomet. (Eventuellt kanske du kunde listat ut att det skulle vara just $x+2$ direkt i huvudet?) $\square$

Metoden som användes i exemplet att hitta den andra faktorn när man känner en faktor i ett polynom kallas för *kort division*. Man kan alternativt använda sig av lång division med liggande stolen precis som man gör för tal. Vi illustrerar de två metoderna i ytterligare ett exempel.

Exempel. Vi tittar på tredjegradspolynomet $x^3 - 9x + 10$. Genom att testa så ser vi att 2 är ett nollställe till polynomet, ty $2^3 - 9 \cdot 2 + 10 = 0$. Därmed vet vi enligt faktorsatsen att $x-2$ är en faktor och att $x^3 - 9x + 10 = (x-2) \cdot q(x)$, där $q(x)$ är ett andragradspolynom.

Vi bestämmer först $q(x)$ med kort division. Vi har

$$x^3 - 9x + 10 = (x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (-2a+b)x^2 + (-2b+c)x - 2c.$$

Koefficienten framför x^3 ger $a = 1$ och konstanten ger $10 = -2c$ så $c = -5$. Koefficienten framför x^2 ger nu $0 = -2a + b = -2 + b$ så $b = 2$. Kontroll med koefficienten framför x ger $-9 = -2b + c = -2 \cdot 2 - 5$ vilket stämmer alldeles utmärkt. Vi får alltså

$$x^3 - 9x + 10 = (x-2)(x^2 + 2x - 5).$$

Vi utför nu lång division med liggande stolen. Här bestämmer man successivt koefficienten för den högsta kvarvarande exponenten.

$$\begin{array}{l|l} \\ \hline x^3-9x+10 & x-2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{x^2} \\ \hline x^3-9x+10 & x-2 \\ \hline -x^2(x-2) & \\ \hline 2x^2-9x+10 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{x^2+2x} \\ \hline x^3-9x+10 & x-2 \\ \hline -x^2(x-2) & \\ \hline 2x^2-9x+10 & \\ -2x(x-2) & \\ \hline -5x+10 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{x^2+2x-5} \\ \hline x^3-9x+10 & x-2 \\ \hline -x^2(x-2) & \\ \hline 2x^2-9x+10 & \\ -2x(x-2) & \\ \hline -5x+10 & \\ -(-5)(x-2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

I första steget frågar vi oss hur många gånger går högsta termen, x, i nämnaren i högsta termen i täljaren d v s x^3. Jo, den går x^2 gånger. Vi skriver detta överst och subtraherar sedan $x^2(x-2)$ ifrån täljaren och får $2x^2 - 9x + 10$. Nu frågar vi oss hur många gånger går högsta termen, x, i nämnaren i högsta termen i det som återstår av täljaren d v s $2x^2$. Jo, den går $2x$ gånger. Vi lägger till detta överst och subtraherar sedan $2x(x-2)$ ifrån återstoden av täljaren och får $-5x+10$. Nu frågar vi oss hur många gånger går högsta termen, x, i nämnaren i högsta termen i det som återstår av täljaren d v s $-5x$. Jo, den går -5 gånger. Vi lägger till detta överst och subtraherar sedan $-5(x-2)$ ifrån återstoden av täljaren och får 0. Därmed ser vi att resten blir 0 (det visste vi ju redan) och kvoten blir x^2+2x-5. □

Man kan utföra polynomdivision även när den inte går jämnt ut. Precis som för tal handlar det då om att givet två polynom p och k framställa p på formen $p(x) = k(x)q(x)+r(x)$, där q kallas *kvot* och r kallas *rest* vid divisionen. Vid heltalsdivision av naturliga tal krävdes att resten skulle vara mindre än det tal man dividerar med. Motsvarande krav för polynomdivision är att *restens gradtal är mindre än gradtalet för det polynom man dividerar med*, d v s att r:s gradtal är mindre än k:s gradtal i beteckningarna ovan. Om p är av grad n och k är av grad m, där $n \geq m$, så är q av grad $n-m$. För $n < m$ är q konstanten 0 och $r = p$. Vid division med ett förstagradspolynom är resten alltid konstant.

Exempel. Låt $p(x) = 2x^4+6x^2+2$ och $k(x) = x^2+x+1$. Polynomdivision ger att

$$2x^4+6x^2+2 = (x^2+x+1)(2x^2-2x+6)+(-4x-4).$$

Kvoten av polynomdivisionen av $p(x) = 2x^4+6x^2+2$ med $k(x) = x^2+x+1$ är alltså $q(x) = 2x^2-2x+6$, och resten är $-4x-4$. □

Faktorsatsen kan användas för att förkorta uttryck som är en kvot av två polynom. För att förkorta ett sådant uttryck måste man hitta en gemensam faktor till de två polynomen. Vi tittar på ett exempel.

Exempel. Förkorta

$$\frac{x^3-x}{x^3+5x^2-6x}$$

så långt det går. Först observerar vi att man kan bryta ut faktorn x ur både täljare och nämnare som vi förkortar bort. Kvar blir då

$$\frac{x^2-1}{x^2+5x-6}$$

Täljaren kan vi faktorisera med hjälp av konjugatregeln till $(x-1)(x+1)$. För att kolla om någon av dessa två är faktorer i nämnaren så kollar vi om 1 eller -1 är ett nollställe till x^2+5x-6. Vi finner att 1 är ett nollställe och faktoriserar (med kort division som ovan) $x^2+5x-6 = (x-1)(x+6)$. Därmed kan vi förkorta bort $x-1$ och får till slut

$$\frac{x+1}{x+6},$$

vilket inte kan förkortas mer.

Observera att det urspungliga och det förkortade uttrycket är lika för alla x utom $x = 0$ och $x = 1$. För dessa två värden är ju inte det ursprungliga uttrycket definierat. $\square$

Vi såg i ett exempel ovan att om man visste ett nollställe till ett andragradspolynom så kunde man med hjälp av faktorisering få det andra nollstället. För andragradspolynom har vi redan en allmän metod för att hitta nollställen, men för polynom av högre grad kan man ha stor nytta av denna observation. Antag att vi har ett tredjegradspolynom $p(x)$ som vi vill hitta alla nollställen till och antag också att vi känner till att a är ett nollställe. Då är $p(x) = (x-a) \cdot q(x)$ där $q(x)$ är ett andragradspolynom. Ett nollställe till $p(x)$ är nu ett nollställe till antingen $x-a$ eller till $q(x)$. För att hitta övriga nollställen till $p(x)$ så ska vi alltså hitta nollställena till andragradspolynomet $q(x)$ vilket vi vet hur man gör.

Exempel. Vi löser ekvationen $x^3 - 9x + 10 = 0$. Vi såg i ett tidigare exempel att $x^3 - 9x + 10 = (x-2)(x^2+2x-5)$, så att $x_1 = 2$ är en lösning och eventuella andra lösningar måste vara nollställen till $x^2 + 2x - 5$. Dessa hittar vi med formeln för lösningar till andragradsekvationer:

$$x_{2,3} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-5)} = -1 \pm \sqrt{6}$$

Lösningarna är alltså $x_1 = 2$, $x_2 = -1 + \sqrt{6}$ och $x_3 = -1 - \sqrt{6}$. $\square$

Följande resultat kan man ha nytta av om man ska försöka hitta ett nollställe till ett polynom av grad 3 eller högre med heltalskoefficienter.

> Antag att vi har ett polynom $x^3 + cx^2 + bx + a$ där alla koefficienter är heltal. Om x_1 är ett heltal som är ett nollställe till polynomet så gäller att konstanttermen a är en multipel av x_1. Samma sak gäller för polynom $x^n + \cdots + bx + a$ av vilken grad n som helst.

Med andra ord är varje heltalsnollställe en delare till konstanttermen a. Det är lätt att inse varför: om x_1 är ett nollställe till polynomet så har vi att $a = -x_1(x_1^{n-1} + \cdots + b$, vilket visar att x_1 är en faktor i a och därmed att a är delbart med x_1. Ungefär på samma sätt kan man visa ett liknande påstående om eventuella rationella nollställen till polynom med heltalskoefficienter.

> Antag att vi har ett polynom $cx^n + \cdots + bx + a$ där alla koefficienter är heltal. Om $x_1 = \frac{p}{q}$ är ett rationellt nollställe till polynomet och p och q är relativt prima, så gäller att konstanttermen a är en multipel av p och koefficienten framför den högsta potensen c är en multipel av q.

Observera att man i båda fallen säger att *om* det finns en heltalslösning, eller en rationell lösning till ekvationen $p(x) = 0$, så måste denna uppfylla vissa villkor. Det finns ingen som helst garanti för att en sådan lösning existerar. Vad vi har är alltså endast ett sätt att göra kvalificerade gissningar.

Exempel. Vi tittar på polynomet $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$. Det har endast heltalskoefficienter så om det har något heltal som nollställe så måste det vara en delare till 6. Möjliga nollställen blir alltså $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$. Om man testar dessa tal så finner man att 4 av dem är nollställen nämligen $\{1, -1, 2, -3\}$. Vi kan alltså faktorisera polynomet som

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3).$$

□

Exempel. Om vi tittar på ekvationen $x^2 - 2 = 0$ inser vi att om den har rationella lösningar så måste dessa vara bland talen $\pm 1, \pm 2$. Inget av dessa tal är dock en lösning, alltså finns inget rationellt tal vars kvadrat är lika med 2.

□

Exempel. Vi letar efter rationella nollställen till $3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$. Om det alls finns sådana så måste de vara på formen $\frac{p}{q}$, där p är en delare till 1 och q är en delare till 3. De enda möjligheterna är alltså $\frac{1}{3}$ och $-\frac{1}{3}$. Insättning ger att $\frac{1}{3}$ är ett nollställe till det givna polynomet.

□

Om ett polynom $p(x)$ har samma faktor $(x - a)$ två gånger så säger man att a är en *dubbelrot* till ekvationen $p(x) = 0$ (om den förekommer tre gånger så kallas den trippelrot o s v). Antalet faktorer $(x - a)$ i polynomets faktorisering kallas *nollställets multiplicitet*.

Exempel. Lös ekvationen $(x^2 - 2x - 7)^2 = 0$.

Lösning: Först löses ekvationen $x^2 - 2x - 7 = 0$, som har rötterna $x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$. Polynomet kan faktoriseras som

$$(x^2 - 2x - 7)^2 = (x - (1 + 2\sqrt{2}))^2 (x - (1 - 2\sqrt{2}))^2,$$

så $1 + 2\sqrt{2}$ och $1 - 2\sqrt{2}$ är dubbelrötter. □

Det är naturligt att ställa sig frågan om det för polynom av godtycklig grad går att härleda formler som uttrycker polynomets nollställen i termer av dess koefficienter, analogt med de formler vi härledde för nollställena till ett andragradspolynom. Svaret är att det låter sig göras för polynom av grad tre och fyra, medan det inte finns sådana formler för polynom av grad fem eller högre. Det sista ska inte tolkas som att ingen ännu har kommit på hur man ska lösa generella femtegradsekvationer. Det är *bevisat* att lösningsformler inte existerar för polynomekvationer av grad högre än fyra[5].

2.5.1 Övningar

2.5.1 Förenkla följande kvoter mellan polynom så långt det går.

a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x-4}$ b) $\dfrac{x^3-4x}{x^4-7x^2+6x}$

2.5.2 Lös följande ekvationer. Tips: De har minst en rot som är ett heltal.

a) $x^3+3x^2+x=0$ b) $x^3-2x^2-5x+6=0$

c) $2x^3+14x^2+22x+4=0$ d) $6+3x^2-5x-x^3=0$

2.5.3 Lös följande ekvationer. Ange om någon av rötterna är dubbelrot eller trippelrot.

a) $(x-1)^3=0$ b) $x^3-1=0$ c) $(x^2-1)^3=0$

2.5.4 Faktoruppdela följande polynom.

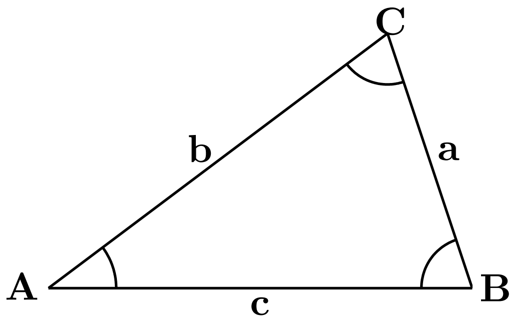
a) x^3-2x^2-5x+6 b) $x^3+7x^2+11x+2$ c) $6+3x^2-5x-x^3$

[5] Lösningsformlerna för tredje- och fjärdegradsekvationer är så komplicerade att de i praktiken är oanvändbara.

3 Plan trigonometri

Inledning

Trigonometri betyder triangelmätning. De grundläggande storheterna som vi kan mäta i en triangel är dess sidor och vinklar. Ett bra sätt att beteckna en triangels sidor och hörn framgår av figuren.



Vi använder alltså små bokstäver för sidorna och deras längder och motsvarande stora bokstäver för hörnen mittemot. Samtidigt får de stora bokstäverna också beteckna vinklarna i respektive hörn. Det finns ett enkelt förhållande mellan storlekarna på sidor och vinklar: storleksordningen är densamma mellan sidorna och deras motstående vinklar. Största sidan står mot största vinkeln, minsta sidan står mot minsta vinkeln. T ex i triangeln i figuren gäller att $b > c > a$ och $B > C > A$. Vidare antar vi att det är känt att vinkelsumman i varje triangel är $180°$, dvs ett halvt varv.

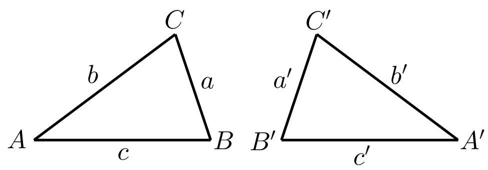
Två specialfall:

- En triangel som har två sidor lika kallas *likbent*. Vinklarna mellan var och en av de lika sidorna och den tredje kallas *basvinklar*. Dessa är alltid lika stora.
- En triangel som har alla tre sidor lika kallas *liksidig*. I en liksidig triangel är alla vinklarna $60°$.

I detta kapitel introduceras de trigonometriska funktionerna och några användbara satser för triangelberäkningar presenteras och används. Först något om två grundläggande begrepp: kongruens och likformighet.

Kongruens

Om det för två trianglar ABC och $A'B'C'$ med motstående sidor betecknade enligt konventionen ovan $a,\ b,\ c$ respektive $a',\ b',\ c'$ gäller: $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, så sägs trianglarna vara *kongruenta*. De kan därmed få vara spegelvända som i nedanstående figur.



För trianglar gäller de tre s k kongruensfallen:

Kongruensfallen

1. **Sida – vinkel – sida:** *Om $a = a'$, $B = B'$ och $c = c'$ så är trianglarna ABC och $A'B'C'$ kongruenta.*
2. **Sida – sida – sida:** *Om $a = a'$, $b = b'$ och $c = c'$ så är trianglarna ABC och $A'B'C'$ kongruenta.*
3. **Vinkel – sida – vinkel:** *Om $A = A'$, $b = b'$ och $C = C'$ så trianglarna ABC och $A'B'C'$ kongruenta.*

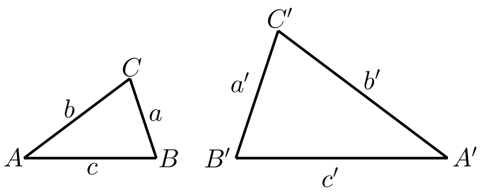
Observera att motsvarigheten till fall 2 *inte* gäller för fyrhörningar: om man klistrat ihop fyra pinnar till en fyrhörning, kan man ”vicka” på konstruktionen och erhålla olika fyrhörningar med samma sidor men med olika vinklar. Detta går förstås inte med en triangel.

Likformighet

Om det för två trianglar ABC och $A'B'C'$ med motstående sidor betecknade enligt konventionen ovan $a,\ b,\ c$ respektive $a',\ b',\ c'$ gäller:

$$A = A', \qquad B = B', \qquad C = C', \qquad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

så sägs trianglarna vara *likformiga*. De kan även nu få vara spegelvända som i figuren, där förhållandet mellan motsvarande sidor är 8:5=1,6. Om man ser den högra triangeln som en likformig avbildning av den vänstra, så är *skalan* 1,6.



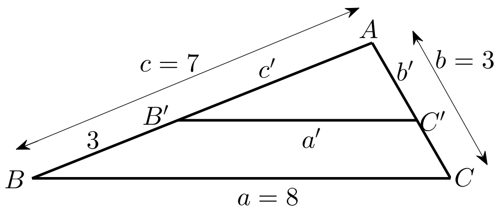
Det finns motsvarigheter till de tre kongruensfallen när det gäller likformighet hos trianglar:

Likformighetsfallen

1. **Sida – vinkel – sida:** *Om* $B = B'$ *och* $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{c'}{c}$ *så är trianglarna* ABC *och* $A'B'C'$ *likformiga.*
2. **Sida – sida – sida:** *Om* $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$ *så är trianglarna* ABC *och* $A'B'C'$ *likformiga.*
3. **Vinkel – (sida) – vinkel:** *Om* $A = A'$*, och* $B = B'$ *så trianglarna* ABC *och* $A'B'C'$ *likformiga.*

Förutsättningarna i fall 3 innebär att även $C = C'$, eftersom alla trianglar har samma vinkelsumma. Enligt definitionen av likformighet ska dels motsvarande vinklar vara lika, dels förhållandet mellan par av motsvarande sidor vara lika. För *trianglar* innebär likformighetsfall 2 och 3 att den räcker att verifiera den ena av dessa två egenskaper.

Exempel 1: I en triangel ABC med sidorna $a = 8$, $b = 3$ och $c = 7$ drar sträckan mellan sidorna b och c parallellt med sidan a, så att det bildas en mindre triangel $AB'C'$ (se figur). Beräkna sidornas längder i denna så kallade topptriangel om sträckan $BB' = 3$.



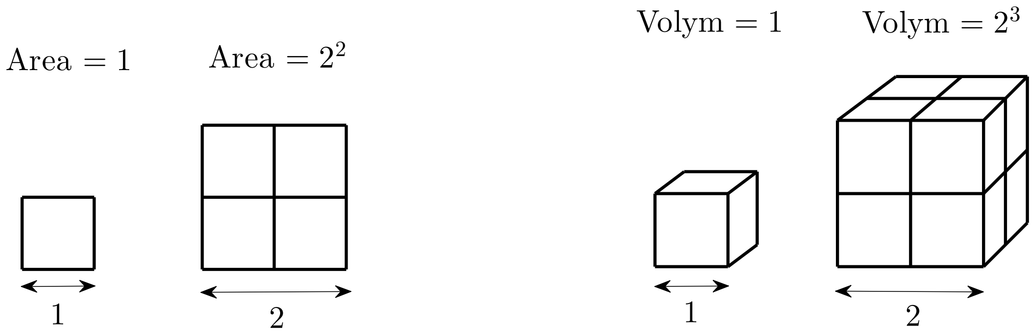
Lösning: Då trianglarnas vinklar överensstämmer: A gemensam, $B = B'$, $C = C'$, så är trianglarna likformiga (tredje likformighetsfallet). Först konstaterar vi att $c' = 7 - 3 = 4$, därefter använder vi likformigheten för att bestämma övriga sidor:

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} \quad \Rightarrow \quad a' = a\frac{c'}{c} = 8\frac{4}{7} = \frac{32}{7} \approx 4,57$$

$$\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \quad \Rightarrow \quad b' = b\frac{c'}{c} = 3\frac{4}{7} = \frac{12}{7} \approx 1,71$$

Svar: Sidorna är $a' \approx 4,57,\ b' \approx 1,71,\ c' = 4$.

Längdskala, areaskala och volymskala



Vi betraktar här likformiga objekt i två och tre dimensioner. Med *längdskalan* $= L$ menar vi förhållandet mellan motsvarande längder i två likformiga objekt. Om vi istället studerar förhållandet mellan två motsvarande areor respektive volymer, så talar vi om *areaskalan* $= A$ respektive *volymskalan* $= V$. Figurerna ovan illustrerar varför

$$A = L^2$$

och

$$V = L^3$$

Exempel 1: På en karta i skalan 1:50000 är längdskalan $\frac{1}{50000}$, vilket innebär att längder i verkligenten ska multipliceras med detta tal, eller divideras med 50000 förstås. Areaskalan är då $(\frac{1}{5\cdot 10^4})^2 = \frac{1}{2{,}5\cdot 10^9}$, areor på kartan är 2,5 miljarder gånger mindre än motsvarande områden i verkligeheten.

Exempel 2: En lådformad kartong har volymen 1 liter. Hur mycket större ska längderna vara i en kartong med samma proportioner och som innehåller 5 liter?

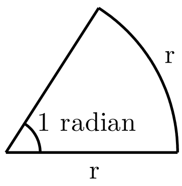
Lösning: Anta att längdskalan ska vara x, dvs att alla längder i den nya kartongen ska vara x ggr större. Då är ju volymskalan $x^3 = 5$, dvs $x = 5^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}71$. Tillverka den nya kartongen med 1,71 gånger längre sidor än i den gamla.

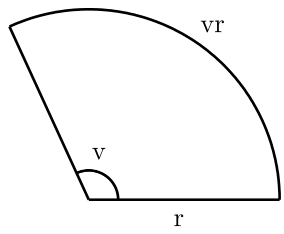
Vinkelenheter

Den mest använda vinkelenheten är nog *grader*. Den är emellertid inte särskilt naturlig, eftersom antalet 360 grader på ett varv känns ganska godtyckligt valt. Talet 360 har dock bra delbarhetsegenskaper, så många naturliga bråkdelar av ett varv svarar mot hela antal grader. Man har också försökt introducera *nygrader (gon)*: 1 varv = 400 nygrader, men 400 har lite sämre delbarhet (t. ex. vinklarna i en liksidig triangel är inte heltal i denna enhet). Om vi släpper delbarhetsaspekten, så är förstås enheten *varv* en naturlig enhet. Men den viktigaste enheten utöver grader har ändå kommit att bli *radianer*. Dess fördel är att den naturligt kopplar ihop cirkelbågens längd med vinkelmåttet.

Definition: Vinkelenheten radian bestäms av att 2π radianer är lika med ett varv.

Detta betyder också att cirkelbågen som har centrumvinkeln v radianer har längden vr radianer, om cirkelns radie är r.





Den vänstra figuren visar hur vinkeln 1 radian svarar mot att radien och cirkelbågen är lika långa. I den högra figuren ser man det generella sambandet mellan vinkelmåttet i radianer och cirkelbågens längd.

I matematiken är radianen den grundläggande vinkelenheten, och den behöver inte sättas ut. Skriver man att en vinkel är 2,5 så förutsätts detta innebära 2,5 radianer. Menar man 2,5 grader, måste man alltid skriva $2,5^\circ$.

Omvandlingar mellan grader och radianer blir enklast om man minns att π radianer är lika med ett halvt varv, dvs 180°. Alltså:

$$\pi = 180^\circ, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

Man uttrycker ofta vinkeln med π som ”enhet”, t. ex. är en rät vinkel lika med $\frac{\pi}{2}$, en 60-gradersvinkel är $\frac{\pi}{3}$. Vinkeln 20° är alltså $20\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{9}$, och $\frac{\pi}{10} = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$.

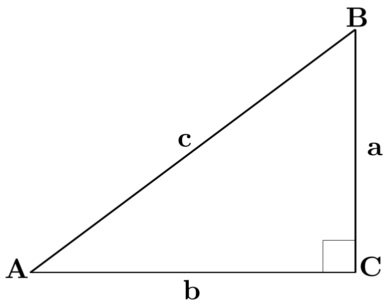
3.1 Rätvinkliga trianglar

En *rät vinkel* är ett kvarts varv $= 90^\circ$, vinklar mellan 0° och 90° kallas *spetsiga*, vinklar mellan 90° och 180° kallas *trubbiga*. En *rätvinklig triangel* har en vinkel som är rät, de övriga vinklarna är därmed spetsiga.

I en rätvinklig triangel kallas de två sidor som bildar rät vinkel *kateter*, den återstående (längsta) sidan kallas *hypotenusa*. Vi formulerar en välkänd sats:

Pythagoras sats:
I varje rätvinklig triangel är, med figurens beteckningar, $a^2 + b^2 = c^2$

I ord uttryckt: *Summan av kateternas kvadrater är lika med kvadraten av hypotenusan.*



Likheten i satsen gäller dessutom *bara för rätvinkliga trianglar*, alltså: om $a^2+b^2 = c^2$ så är vinkeln C rät. Detta kan man kalla *omvändningen av Pythagoras sats*.

Exempel 4: I en rätvinklig triangel är den ena kateten $a = 126$ cm och hypotenusan är $c = 130$ cm. Då kan vi beräkna den återstående kateten b ur Pythagoras sats:

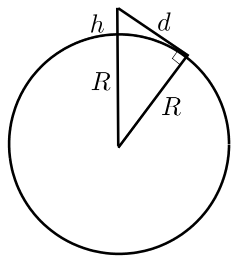
$$126^2 + b^2 = 130^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 130^2 - 126^2 = 1024 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{1024} = 32$$

Alltså: $b = 32$ cm

Exempel 5: En triangel har sidorna $a = 295$, $b = 305$ och $c = 424$. Är den rätvinklig? Om den är rätvinklig ska enligt Pythagoras sats gälla $a^2 + b^2 = c^2$. Här visar det sig att $a^2 + b^2 = 180050$ och $c^2 = 179776$, så triangeln kan inte vara rätvinklig (fast det är ”nära”).

Exempel 6: Vi ställer samma fråga om en triangel har sidorna $a = 297$, $b = 304$ och $c = 425$. Nu visar det sig att $a^2 + b^2 = c^2 = 180625$. Omvändningen av Pythagoras sats gäller (se kommentar ovan): om $a^2 + b^2 = c^2$, så är vinkeln C rät. Denna triangel är alltså exakt rätvinklig.

Exempel 7: Beräkna hur långt det är till den synliga horisonten på öppet hav då ögat befinner sig 15 meter över havsytan. Vi antar att jorden är klotformad med radien 6368 km. (Vi bortser också från atmosfärisk ljusbrytning som ökar avståndet något, varierande med de atmosfäriska förhållandena och sägs i genomsnitt vara ca 8% för måttliga värden på h.)



Lösning: Med beteckningar enligt figuren, som förstås är kraftigt överdriven, har vi en rätvinklig triangel med kateterna d (det sökta avståndet) och R (jordens radie) och hypotenusan $R+h$ (radien plus höjden). Vi sätter in detta i Pythagoras sats (alla längder i enheten meter!):

$$d^2+R^2=(R+h)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad d^2+R^2=R^2+h^2+2Rh \quad \Longleftrightarrow \quad d^2=h^2+2Rh$$

$$d=\sqrt{h^2+2Rh}=\sqrt{15^2+2\cdot 6368000\cdot 15}\,\mathrm{m}\approx 13822\,\mathrm{m}$$

Svar: Avståndet är ca 14 km.

Anmärkning: i exemplet är h avsevärt mycket mindre än R. Då kan man försumma h^2 i förhållande till $2Rh$ och få den enklare formeln $d\approx\sqrt{2Rh}$ (skiljer bara en knapp cm i vårt exempel), men om h börjar komma in på rymdfartens område, så kan man behöva den exakta formeln.

3.2 De trigonometriska funktionerna i rätvinkliga trianglar

Med utgångspunkt från figuren vid Pythagoras sats definierar vi de *trigonometriska funktionerna*:

$$\begin{aligned}
\sin A &= \frac{a}{c} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusa}}, \\
\cos A &= \frac{b}{c} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusa}}, \\
\tan A &= \frac{a}{b} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}, \\
\cot A &= \frac{b}{a} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{motstående katet}}.
\end{aligned}$$

Förkortningarna utläses *sinus, cosinus, tangens och cotangens*. Det följer av definitionerna att $\sin A$ och $\tan A$ ökar om A ökar, medan $\cos A$ och $\cot A$ minskar (så länge vinkeln A är spetsig, större vinklar behandlas senare). Vi observerar också gränsfallen 0° och 90° där vi får

$$\sin 0^\circ = \tan 0^\circ = 0, \qquad \cos 0^\circ = 1$$

$$\sin 90^\circ = 1, \qquad \cos 90^\circ = \cot 90^\circ = 0$$

medan tangens inte kan definieras för 90° och cotangens inte kan definieras för 0°.

Vissa samband mellan de olika trigonometriska funktionerna kan också konstateras:

$$\boxed{\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cot A}, \qquad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\tan A}}$$

Exempel 8: En triangel med sidorna $a = 3,\ b = 4$ och $c = 5$ längdenheter är rätvinklig, eftersom $3^2 + 4^2 = 5^2$. Den brukar kallas den egyptiska triangeln och ger oss ett lätt sätt att tillverka en vinkelhake. I denna triangel är alltså

$$\sin A = \frac{3}{5},\ \cos A = \frac{4}{5},\ \tan A = \frac{3}{4},\ \cot A = \frac{4}{3}.$$

Med hjälp av miniräknaren kan vi beräkna de trigonometriska funktionerna för en vinkel, men vi kan också ta reda på vinkeln, om man känner en trigonometrisk funktion (åtminstone om vinkeln är spetsig som här). Eftersom det ser ganska olika ut på olika räknare, tar vi detta på undervisningen och inte här i detalj. T ex kan vi få ut vinkeln A i den egyptiska triangeln genom att använda sinusfunktionen enligt ovan. $\sin A = 0,6$ ger då med miniräknarens hjälp att $A \approx 36,9^\circ$.

Vi får också genom att multiplicera med nämnarna i definitionerna att

$$a = c \cdot \sin A, \quad b = c \cdot \cos A, \quad a = b \cdot \tan A.$$

Exempel 9: Antag att sidan $c = 12$cm och vinkeln $A = 52°$. Då kan vi beräkna de återstående sidorna: $a = c \cdot \sin A = 12 \cdot \sin 52° \approx 9,46$cm och $b = c \cdot \cos A = 12 \cdot \cos 52° \approx 7,39$cm.

Exempel 10: Antag att sidan $b = 8$cm och vinkeln $A = 33°$. Då är $\tan A = \frac{a}{b} \Rightarrow$ $a = b \cdot \tan A = 8 \tan 33° \approx 5,20$cm. Vidare är $\cos A = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\cos A} = \frac{8}{\cos 33°} \approx 9,54$cm.

Två vinklar som har summan 90° kallas *komplementvinklar*. I vår rätvinkliga triangel är A och $B = 90° - A$ komplementvinklar. Vi tittar lite utförligare på definitionerna av de trigonometriska funktionerna och kan då se:

$$\begin{aligned} \cos(90° - A) &= \sin A, & \sin(90° - A) &= \cos A, \\ \cot(90° - A) &= \tan A, & \tan(90° - A) &= \cot A. \end{aligned}$$

Det finns ett annat enkelt samband mellan sinus och cosinus. Om vi tar likheten $a^2 + b^2 = c^2$ i Pythagoras sats och dividerar båda leden med c^2, får vi

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

dvs uttryckt i sinus och cosinus:

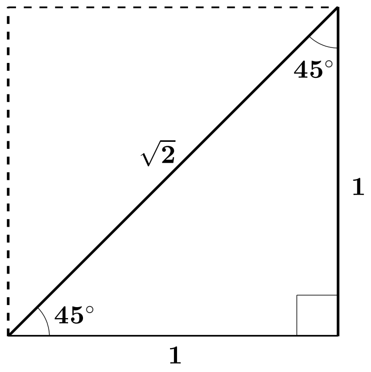
$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$$

Sambandet brukar kallas *trigonometriska ettan*. Man brukar skriva lite kortare:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

För vissa vinklar kan man komma åt de exakta värdena på de trigonometriska funktionerna. Speciellt om man utgår ifrån en kvadrat eller en liksidig triangel är detta enkelt.

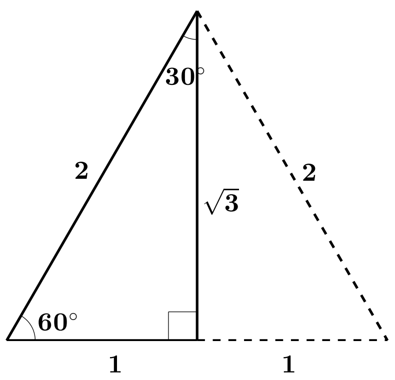
45° − 45° − 90°: Vi delar en kvadrat med sidan 1 längdenhet längs diagonalen. Diagonalens längd blir då $\sqrt{2}$ längdenheter (använd Pythagoras sats!).



Nu kan vi använda våra definitioner av trigonometriska funktioner:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tan 45^\circ = 1, \qquad \cot 45^\circ = 1$$

30° − 60° − 90°: Vi upprepar bravaden med en liksidig triangel som vi klyver symmetriskt. Vi låter sidorna vara 2 längdenheter, så att den delade halva sidan blir 1 längdenhet. Med Pythagoras sats kan vi då beräkna delningslinjen (höjden) till $\sqrt{3}$.



Nu får vi de exakta värdena på de trigonometriska funktionerna för både 60° och 30° (vi hoppar över cotangens denna gång):

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

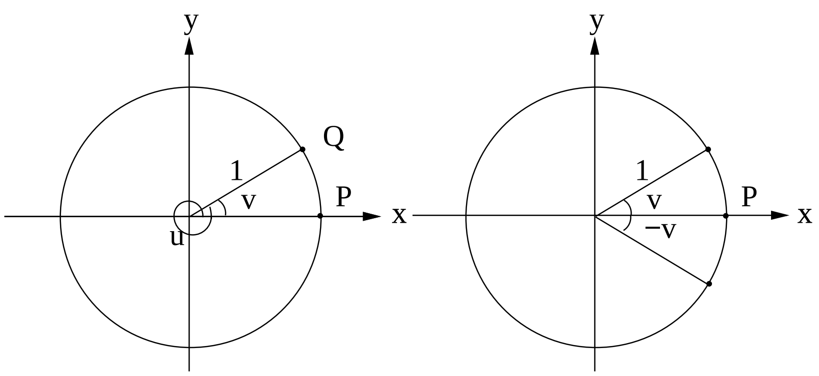
Vi kan ställa samman våra resultat i en liten tabell, där vi också tar med 0° och 90°.

v	0	30°	45°	60°	90°
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–

3.3 Trigonometriska funktionerna för allmänna vinklar

I trianglar kan ju vinklarna bli mellan 0° och 180°, i fyrhörningar och andra geometriska figurer kan man ha vinklar melllan 0° och 360°. Det senare gäller ju också vid angivning av kurs för ett fartyg eller flygplan. I andra sammanhang, t ex när man arbetar med roterande apparater (generatorer, motorer etc) eller med andra periodiska processer, låter man vinkeln löpa vidare flera varv. Om rotationsriktningen vänds, räknar man också med negativa vinklar. Med andra ord, vinklar kan få ha vilka reella värden som helst. Därmed finns det också anledning att utvidga våra definitioner av de trigonometriska funktionerna.

För att kunna definiera de trigonometriska funktionerna mera allmänt, inför vi den s k *enhetscirkeln* i ett koordinatsystem. Dess medelpunkt är origo $O = (0,0)$, dess radie är 1. Punkten $P = (1,0)$ är cirkelns skärningspunkt med positiva x-axeln. Vi tänker oss nu att sträckan OP likt en visare på en klocka vrids *moturs* runt origo så att den hamnar i Q. Vinkeln mellan strålens utgångsläge OP och dess slutläge OQ kallar vi v. Observera att om man vrider $v + 360°$ så hamnar punkten P också i Q eftersom 360° motsvarar vridning ett varv moturs.



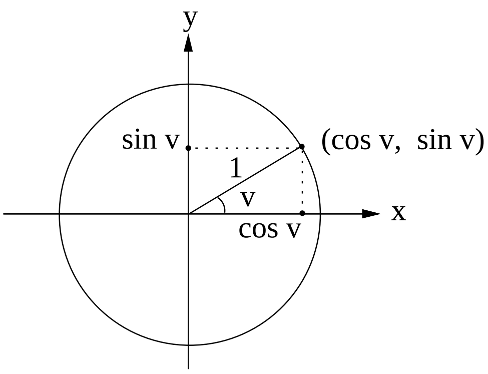
(a) Vinkeln u är $v + 360°$.

(b) En vinkel och dess negativa motsvarighet.

Figur 11: Allmänna vinklar.

Om visaren i stället vrids *medurs* räknas vinkeln *negativ*.

Det finns en stor fördel med detta synsätt. Vi kan tänka oss att visaren vrids mer än ett varv och låta vinkeln vara längden av den genomlöpta cirkelbågen. Vinklar kan då vara större än 2π. Dessa har inte längre någon geometrisk motsvarighet. Den punkt som motsvarar vinkeln 450° är $(0,1)$ eftersom $450^\circ = 90^\circ + 360^\circ$. Visaren vrids ett och ett kvarts varv. Vinklarna 450° och 90° motsvaras av *samma punkt* men är *olika vinklar*. Om visaren vrids *medurs* är vinkeln negativ. Vinkeln -270° motsvaras också av $(0,1)$.



Figur 12: Enhetscirkeln.

En första observation vi kan göra är att om

$$0 < v < 90^\circ$$

så är $Q = (\cos v, \sin v)$, eftersom vi har en rätvinklig triangel med en hypotenusa av längd 1. Denna observation ligger till grund för den allmänna definitionen av de trigonometriska funktionernas värden för godtyckliga vinklar.

Definition: Låt $Q = (x,y)$ motsvara vinkeln v enligt ovan. Då är

$$\cos v = x, \quad \sin v = y, \quad \tan v = \frac{y}{x} \text{ om } x \neq 0, \quad \cot v = \frac{x}{y} \text{ om } y \neq 0.$$

För vinklar v sådana att $x = 0$ är $\tan v$ odefinierat. För vinklar v sådana att $y = 0$ är $\cot v$ odefinierat.

Eftersom en ökning eller minskning av v med 360° motsvarar en vridning av ”visaren” *OP* ett helt varv mot- eller medurs följer det att sinus och cosinus är *periodiska*. Närmare bestämt så har vi följande:

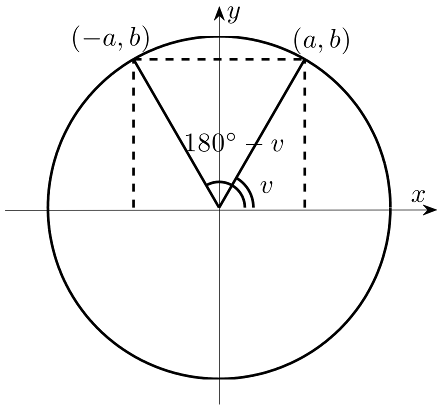
$$\begin{aligned}
\sin v &= \sin(v + 360^\circ) = \sin(v + n \cdot 360^\circ), \text{ för alla } n \in \mathbb{Z} \\
\cos v &= \cos(v + 360^\circ) = \cos(v + n \cdot 360^\circ), \text{ för alla } n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Trubbiga vinklar

I en triangel är vinklarna alltid mellan $0°$ och $180°$. Därför ska vi koncentrera oss på att utforska sinus, cosinus och tangens för trubbiga vinklar, dvs mellan $90°$ och $180°$, eftersom vi vill kunna använda trigonometrin på allmänna trianglar (förut har vi ju bara kunnat använda den på rätvinkliga trianglar). Vi har tidigare kommit åt de spetsiga vinklarna, så nu ska vi jämföra dessa med de trubbiga genom en *spegling* i y-axeln. Två vinklar med summan $180°$, alltså v och $180° - v$ kallas *supplementvinklar*. De svarar mot varandra genom spegling i y-axeln.

Spegelpunkten till (a,b) med avseende på y-axeln är $(-a,b)$ med vinkeln $(180° - v)$. Alltså är

$$\begin{aligned}
\cos(180° - v) &= -a &&= -\cos v \\
\sin(180° - v) &= b &&= \sin v \\
\tan(180° - v) &= \frac{b}{-a} &&= -\tan v,
\end{aligned}$$



Figur 13: Spegling i y-axeln.

Vi kan nu bygga ut vår gamla tabell med exakta värden:

v	0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Exempel 11:

(a) Lös ekvationen $\sin x = 0,88$ i intervallet $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$.

(b) Lös ekvationen $\cos x = 0,88$ i intervallet $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$.

(c) Lös ekvationen $\cos x = -0,88$ i intervallet $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$.

Lösning

(a) Ekvationen har två olika lösningar i intervallet, miniräknaren ger oss den spetsiga lösningen $x_1 \approx 61,6^\circ$, den andra (trubbiga) lösningen är supplementvinkeln $x_2 = 180^\circ - x_1 \approx 118,4^\circ$.

(b) Cosinusekvationen har bara en lösning i vårt intervall, vi får den av miniräknaren: $x \approx 28,4^\circ$

(c) Samma gäller här, men med ett negativt värde är vinkeln trubbig. Miniräknaren ger $x \approx 151,6^\circ$ (som är supplementvinkeln till lösningen i (b)).

Detta exempel visar att cosinus är att föredra framför sinus vid vinkelberäkningar, om man kan välja. I trianglar finns det högst en trubbig vinkel, så om man beräknar en vinkel som inte är triangelns största, kan man vara säker på att den är spetsig. Då är sinusekvationen ”ofarlig”.

Anm: Om man vill bestämma *alla* lösningar till ekvationen $\sin x = 0,88$, i exempel 9a, räcker det att man bestämmer de två lösningarna $x_1 \approx 61,6^\circ$, och $x_2 \approx 118,4^\circ$ i intervallet $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ och sedan lägger till hela varv till dessa:

$$x = x_1 \pm 360^\circ, \ \ x = x_1 \pm 2 \cdot 360^\circ, \ \ x = x_1 \pm 3 \cdot 360^\circ, \ldots$$

och

$$x = x_2 \pm 360^\circ, \ \ x = x_2 \pm 2 \cdot 360^\circ, \ \ x = x_2 \pm 3 \cdot 360^\circ, \ldots$$

Detta kan sammanfattas lite kortare:

$$\begin{cases} x \approx 61,6^\circ + n \cdot 360^\circ \\ x \approx 118,4^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases}$$

$$\text{där } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.$$

För cosinusekvationen finns det också ett par av lösningar i varje varv på enhetscirkeln (utom då högerledet är 1 eller -1). Om $\cos v = a$ så är nämligen också $\cos(-v) = a$. I exemplet 9b ovan får vi då samtliga lösningar till ekvationen $\cos x = 0,88$ enligt följande:

$$\begin{cases} x \approx 28,4^\circ + n \cdot 360^\circ \\ x \approx -28,4^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases}$$

$$\text{där } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.$$

3.4 Allmänna trianglar, areasatsen, sinus- och cosinussatserna.

En triangel har antingen tre spetsiga vinklar, den kallas då spetsvinklig, eller en trubbig och två spetsiga då den kallas trubbvinklig, eller en rät vinkel och två spetsiga då den som bekant kallas rätvinklig.

Ganska ofta beror kalkyler eller resonemang på om triangeln är spets-, rät-, eller trubbvinklig. Det är därför viktigt att övertyga sig om att påståenden etc är allmängiltiga och inte bara gäller t ex spetsvinkliga trianglar.

Följande satser kommer att användas i detta avsnitt. Deras bevis ges i Appendix.

Areasatsen: För en triangel med sidorna a, b och c och motstående vinklar A, B och C så gäller för *triangelns area* T att

$$T = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$

Med andra ord så är arean halva produkten av två sidors längder och sinus för deras mellanliggande vinkel.

Sinussatsen: För en triangel med sidorna a, b och c och motstående vinklar A, B och C så gäller att

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Cosinussatsen: För en triangel med sidorna a, b och c och motstående vinklar A, B och C så gäller att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Anmärkning 1: Sinussatsens ekvationer kan lika gärna skrivas $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, vilket kan vara behändigt om det är en sida man vill lösa ut.

Anmärkning 2: I specialfallet $C = 90^\circ$ fås $c^2 = a^2 + b^2$, d v s Pythagoras sats.

Exempel 12: En triangel har sidorna $a = 27$, $b = 39$ (längdenheter) och vinkeln $C = 95°$. Beräkna sidan c och triangelns area.

Lösning: Cosinussatsen ger $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos C = 27^2 + 39^2 - 2 \cdot 27 \cdot 39 \cos 95°$. Kvadratroten ur detta ger $c \approx 49,3$

Areasatsen ger triangelarean $T = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin C}{2} = \dfrac{27 \cdot 39 \cdot \sin 95°}{2} \approx 524,5$ areaenheter.

Exempel 13: En triangel har sidorna $a = 15$, $b = 19$ och $c = 7$. Beräkna triangelns största vinkel.

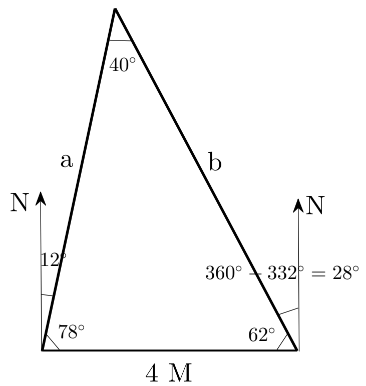
Lösning: Den största vinkeln är B eftersom den står mot den största sidan. Cosinussatsen ger

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \quad \Rightarrow \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -\frac{87}{210}$$

Med miniräknarens hjälp får vi $B \approx 114,5°$.

Exempel 14: Ett fartyg rör sig med 8 knop rakt österut, opåverkat av strömmar. Vid två tillfällen med 30 minuters mellanrum mäter man riktningen till en och samma fyr. Bäringen blir då $12°$ respektive $332°$. Beräkna avståndet från fartyget till fyren vid de båda tidpunkterna.

Lösning: Efter 30 minuters gång med farten 8 knop har man tillryggalagt 4 nautiska mil i väst-östlig riktning. Från denna baslinje har man två sträckor a och b att beräkna i en triangel med vinklarna $78°$, $62°$ och $40°$ (se figuren, där också sambanden mellan de i uppgiften angivna riktningarna och triangelns vinklar antyds).



Både a och b kan beräknas med hjälp av sinussatsen:

$$\frac{a}{\sin 62°} = \frac{b}{\sin 78°} = \frac{4}{\sin 40°} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4\sin 62°}{\sin 40°} \approx 5.49, \quad b = \frac{4\sin 78°}{\sin 40°} \approx 6.09$$

Svar: avstånden var **5.5 M** respektive **6.1 M**.

Exempel 15: Solvera en triangel, d v s beräkna alla sidor och vinklar, om det är känt att $a = 7,0,\ \ b = 5,5$ och $B = 40^\circ$.

Lösning 1: Sinussatsen ger

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \quad \Rightarrow \quad \sin A = \frac{a}{b} \cdot \sin B = \frac{7,0}{5,5} \cdot \sin 40^\circ \approx \frac{7,0}{5,5} \cdot 0,643 \approx 0,818$$

Ekvationen $\sin A \approx 0,818$ har lösningarna

$$A_1 \approx 54,9^\circ \text{ (spetsig vinkel) och } A_2 = 180^\circ - A_1 \approx 125,1^\circ \text{ (trubbig vinkel),}$$

ty $\sin A_2 = \sin(180^\circ - A_1) = \sin A_1$.

Fall 1: $A_1 \approx 54,9^\circ$ ger vinkeln $C_1 = 180^\circ - B - A_1 \approx 85,1^\circ$. Med sinussatsen fås sidan

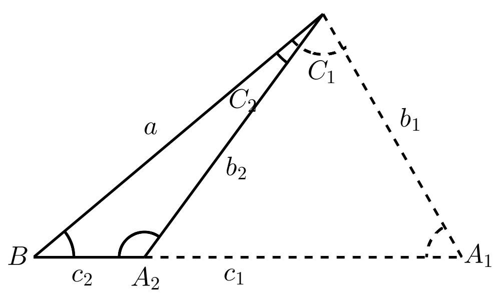
$$\frac{c_1}{\sin C_1} = \frac{b}{\sin B} \quad \Rightarrow \quad c_1 = b \cdot \frac{\sin C_1}{\sin B} \approx 5,5 \cdot \frac{\sin 85,1^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 5,5 \cdot \frac{0,996}{0,643} \approx 8,5.$$

Fall 2: $A_2 \approx 125,1^\circ$ ger vinkeln $C_2 = 180^\circ - B - A_2 \approx 14,9^\circ$, och sidan

$$\frac{c_2}{\sin C_2} = \frac{b}{\sin B} \quad \Rightarrow \quad c_2 = b \cdot \sin C_2 / \sin B \approx 5,5 \cdot \sin 14,9^\circ / \sin 40^\circ$$

$$\approx 5,5 \cdot 0,257/0,643 \approx 2,2.$$

Figuren illustrerar de två fallen (fall 1 streckat där det skiljer sig)



Lösning 2: Man kan också lösa detta problem med cosinussatsen. Man löser då ut sidan c, som denna gång inte är den som står mot den kända vinkeln (som i exempel 10), och man får en andragradsekvation som ger oss de två fallen:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \quad \Longleftrightarrow \quad c^2 - 2ac\cos B + a^2 - b^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$c^2 - (14\cos 40^\circ)c + 18,75 = 0$$

pq-formeln ger oss

$$c = 7\cos 40^\circ \pm \sqrt{(7\cos 40^\circ)^2 - 18,75} \approx 5,36 \pm 3,16$$

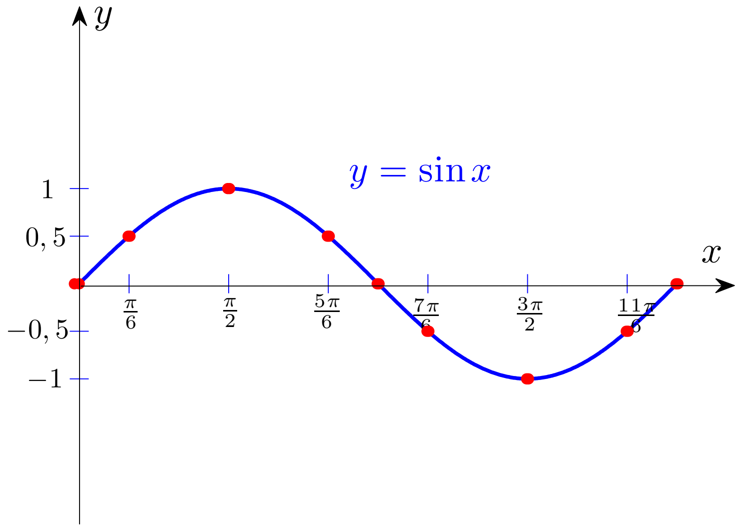
Vi får de två fallen $c_1 \approx 8,5$ och $c_2 \approx 2,2$. Med sinussatsen bestämmer man sedan den mindre av de återstående vinklarna, så man vet att man ska välja det spetsiga lösningsalternativet som sinusekvationen ger. Vilken som är den mindre avgörs ju av storleksordningen mellan de motstående sidorna, som nu är kända. Den sista vinkeln bestäms som förut med vinkelsumman. Detaljerna utelämnas här.

Svar:
Fall 1: $A_1 \approx 54,9^\circ, \quad C_1 \approx 85,1^\circ, \quad c_1 \approx 8,5$
Fall 2: $A_2 \approx 125,1^\circ, \quad C_2 \approx 14,9^\circ, \quad c_2 \approx 2,2.$

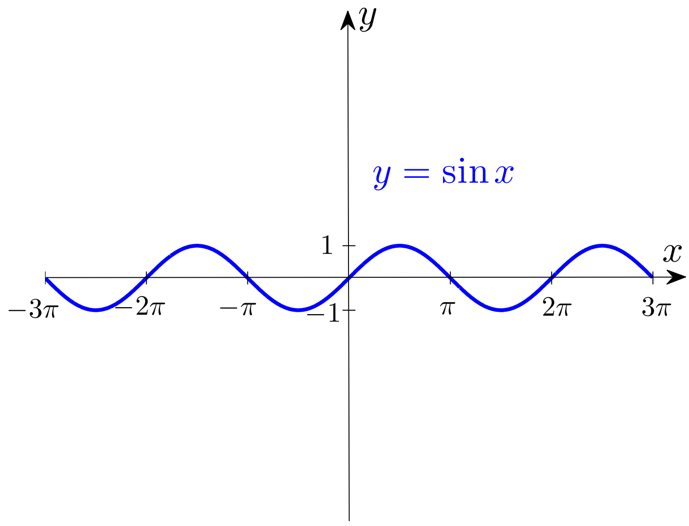
3.5 Grafritning, sinus- och cosinuskurvor.

Vi har hittills illustrerat sinus och cosinus med hjälp av enhetscirkeln, där vinkeln lätt kan tolkas grafiskt. Ofta vill man istället åskådliggöra sambandet i en *graf*. Man lägger då ut vinkeln (här kallad x istället för v) längs en vågrät axel, och motsvarande funktionsvärde, t. ex. $\sin x$ längs en lodrät axel. Vi illustrerar detta för sinusfunktionen för alla vinklar mellan $0°$ och $360°$. Till stöd använder vi en värdetabell, som innehåller några väl valda vinklar. Vinklarna uttrycks i både grader och radianer, i figuren radianer. Förbind stödpunkterna med känsla: det finns inga spetsar eller hörn på en sinuskurva!

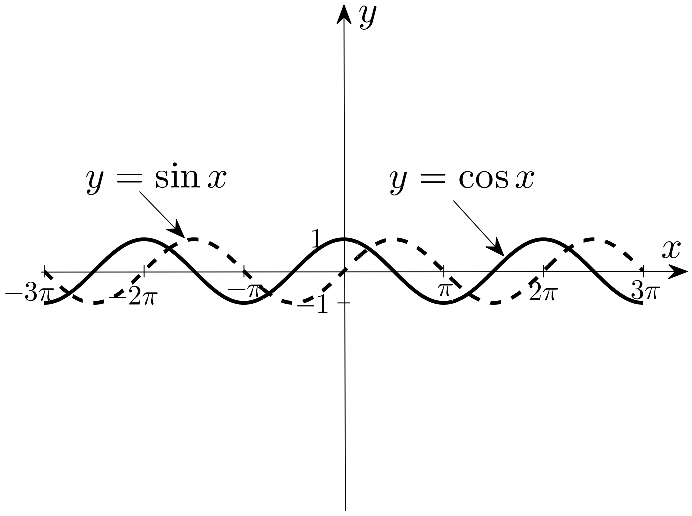
x	$y = \sin x$
$0° = 0$	0
$30° = \pi/6$	$0,5$
$90° = \pi/2$	1
$150° = 5\pi/6$	$0,5$
$180° = \pi$	0
$210° = 7\pi/6$	$-0,5$
$270° = 3\pi/2$	-1
$330° = 11\pi/6$	$-0,5$
$360° = 2\pi$	0



Eftersom sinuskurvan är periodisk, kan vi lätt fortsätta ritandet över fler perioder:



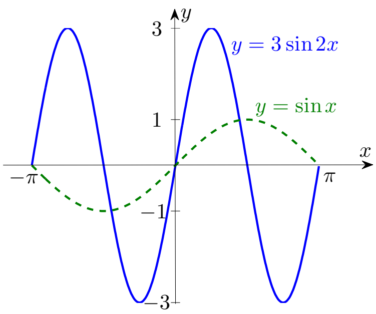
Cosinuskurvan då? Pröva att göra en liknande värdetabell för en period av cosinusfunktionen, då ser du snart att grafen är en sinuskurva som är förskjuten $90^\circ = \pi/2$ åt vänster (vilket speglar sambandet $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ och som kan förstås med hjälp av enhetscirkeln):



När man studerar sinusformade förlopp (t. ex. vissa vågrörelser och växelström), har man att göra med lite allmännare varianter av typen $y = A\sin(\omega x + \phi)$. Här ska A, ω och ϕ betraktas som konstanter, medan x som vanligt är vår variabel. I tillämpningar är denna variabel ofta tiden, och skrivs då vanligen t istället. Konstanten A kallas *amp-lituden*, den innebär att y-värdena varierar mellan $-A$ och A istället för -1 och 1. Konstanten ω kallas vinkelfrekvensen. Den påverkar perioden, vilket vi ska se i följande exempel. Konstanten ϕ kallas fasvinkel, och effekten av den är förflyttningar av kurvan i sidled.

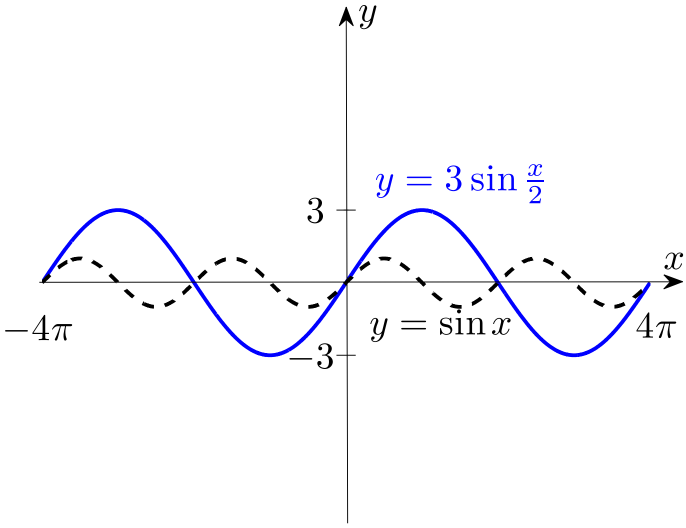
Exempel 16: Rita grafen till funktionen $y = 3\sin 2x$.

I värdetabellen för $y = \sin x$ hade vi de tre första x-värdena 0, $\pi/6$, $\pi/2$. Nu ser vi att vinkeln $2x$ får dessa värden ”tidigare”, nämligen då x är 0, $\pi/12, \pi/4$. Vi får en dubbelt så snabb svängning, och en hel period har avverkats redan då $x = \pi$. Vi observerar också att amplituden är 3, så de gamla y-värdena multipliceras med 3. Figur på nästa sida.



Exempel 17: Rita grafen till funktionen $y = 3\sin\frac{x}{2}$.

Fortfarande är alltså amplituden 3. När nu vinkeln är $x/2$ istället för x, måste vi ha dubbelt så stora x för att få vinkelvärdena i värdetabellen för $y = \sin x$. Detta ger ett förlopp som är hälften så ”snabbt”, och perioden blir dubbelt så lång.



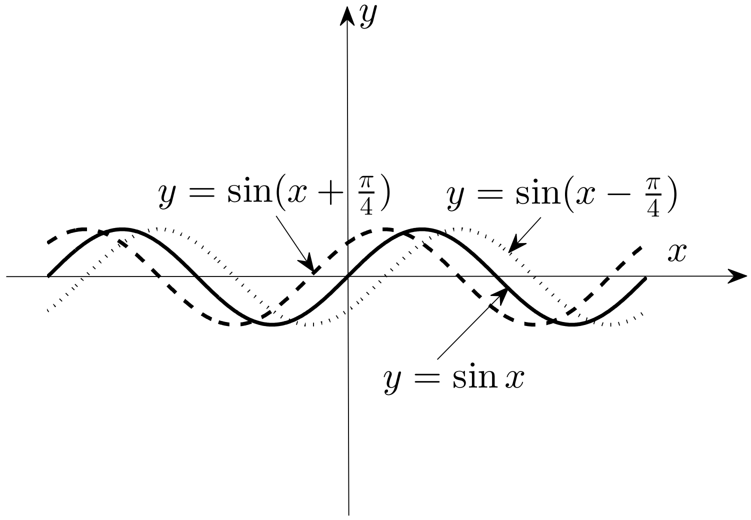
Vi kan sammanfatta sambandet mellan vinkelfrekvens ω och period T:

För funktionen $y = A\sin(\omega x + \phi)$ eller $y = A\cos(\omega x + \phi)$ med perioden T är $\omega T = 2\pi$.

Hittills har vi haft $\phi = 0$, men vi ska nu se vilken roll fasvinkeln ϕ spelar.

Exempel 18: Rita graferna för $y = \sin x$, $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ och $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ i samma diagram, om $\phi = \frac{\pi}{2} = 45^\circ$.

Vi känner redan grafen för $y = \sin x$. Om vi byter ut x mot $x + \phi$, så får vi en förskjutning av värdena så att exempelvis $x = 0$ i den första funktionen motsvarar $x + \phi = 0$, dvs $x = -\phi$ i den andra. Om ϕ är positivt, blir därmed kurvan förtidigad"ϕ enheter på x-axeln, alltså förskjuten just så *åt vänster*. Om ϕ är negativt, förskjuts kurvan istället *åt höger*. Såhär ser detta ut i fallet $\phi = \frac{\pi}{4} = 45°$:



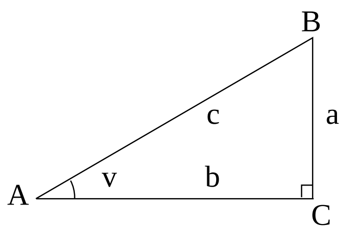
Övningar

1. En 170 cm lång person står bredvid ett träd. Personens skugga är 260 cm lång, trädets är 28 m. Hur högt är trädet?

2. En triangel T_1 har sidorna 12 cm, 21 cm och 27 cm. En mindre triangel T_2 bildas genom att man kapar T_1 parallellt med den kortaste sidan. Den sträcka som delar T_1 har längden 8 cm. Vilka blir de övriga sidlängderna i T_2?

3. I en rätvinklig triangel är kateterna 19 och 33 längdenheter. Hur lång är hypotenusan?

4. I en triangel är längsta sidan 21853, en annan sida är 8405. Hur lång är den tredje sidan om triangeln är rätvinklig?

5. 

   Solvera (bestäm alla sidor och vinklar i) följande rätvinkliga trianglar med beteckningar enligt figuren bredvid:

   (a) $c = 4,0$ och $A = 35^\circ$
   (b) $a = 3,0$ och $A = 36^\circ$
   (c) $a = 2,0$ och $c = 3,0$
   (d) $a = 2,0$ och $b = 3,0$
   (e) $b = 5,0$ och $B = 55^\circ$.

6. Bestäm för v i intervallet $0^\circ < v < 90^\circ$)

   (a) $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 3/5$
   [Ledning: Rita en triangel med $a = 3$ och $c = 5$]

   (b) $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 2/3$
   (c) $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 1/3$
   (d) $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 0,4$
   (e) $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 1/2$
   (f) $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 24/7$
   (g) $\sin v$ och $\cos v$, om $\cot v = 0,7$

7. Bestäm alla lösningar mellan 0° och 180° till följande ekvationer:

   (a) $\sin v = 0,733$

   (b) $\sin v = -0,733$

   (c) $\cos v = 0,733$

   (d) $\cos v = -0,733$

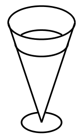
8. I en triangel är en sida 12 cm och dess motstående vinkel är 80°, en annan sida är 10 cm. Beräkna triangelns övriga sidor och vinklar samt dess area.

9. Vilka är vinklarna i en triangel med sidorna 13, 19 och 25?

10. I en triangel är längsta sidan 12 cm och två av vinklarna är 30° respektive 40°. Beräkna triangelns övriga sidor och dess area.

11. I en triangel är vinkeln $A = 34^\circ$, sidan $b = 10$ och sidan $a = 7$. Beräkna återstående sidor och vinklar.

12. I en triangel är vinkeln $A = 34^\circ$, sidan $b = 10$ och sidan $a = 11$. Beräkna återstående sidor och vinklar.



13. Ett konformat glas är 10 cm högt. Till vilken höjd ska glaset fyllas för att bli halvfullt?

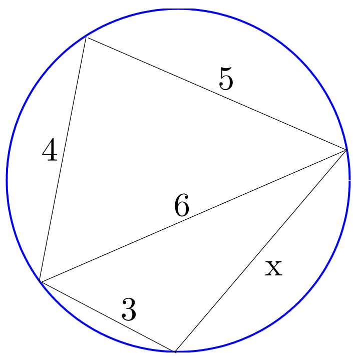
14. Två personer står på var sitt fartygsdäck, den ena med ögonhöjd 20 m över havet, den andra 15 m. Beräkna det största avstånd på vilket de skulle kunna se varandra (åtminstone vid god sikt och med bra kikare). Vi bortser från atmosfärisk ljusbrytning och vi betraktar jorden som klotformad med radien 6371 km.

15. En lodrät mast har monterats på en 50m hög byggnad. Då man står 100m från byggnadens fot (vågrät mark) kan man mäta den vinkel som masten upptar till 12°. Beräkna mastens höjd.

16. En annan lodrät mast står på plan, horisontell mark. Masten är stagad med stålwirar, som kan betraktas som rätlinjiga (hårt spända) och är fastspända i mastens topp och i marken. En av wirarna bildar vinkeln 35° med marken, för en annan är vinkeln 50°. Den sistnämnda wiren fäster i marken 10 meter närmare mastens fotpunkt än den förstnämnda. Beräkna mastens höjd.

17. Ibland kan man se planeten Venus och solen samtidigt (åtminstone går detta med ett bra teleskop). Vid ett sådant tillfälle bestämdes vinkeln mellan de båda himlakropparnas två riktningar till 12°. Om vi betraktar jordens och Venus banor kring solen som cirklar i samma plan med solen i centrum och med radier 150 miljoner km respektive 108 miljoner km, hur långt var det då från jorden till Venus vid detta tillfälle?

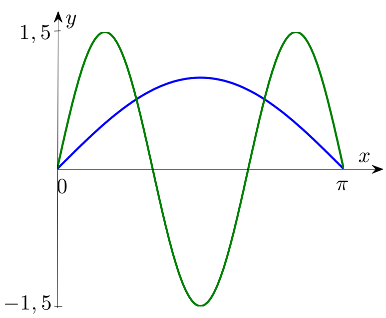
18. Beräkna sidan markerad med x i figuren. Fyrhörningens alla hörn ligger på sam-



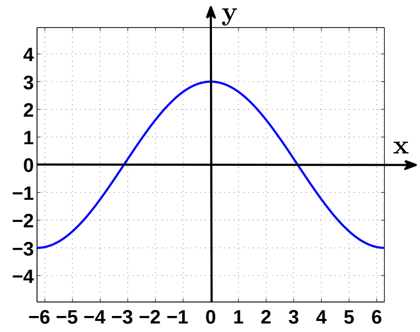
ma cirkel, enheten är cm.

Ledning: om en fyrhörning är inskriven i en cirkel, finns ett speciellt samband mellan vinklarna för två motstående hörn. Detta samband kan härledas ur satsen om medelpunktsvinkel och bågvinkel (=periferivinkel).

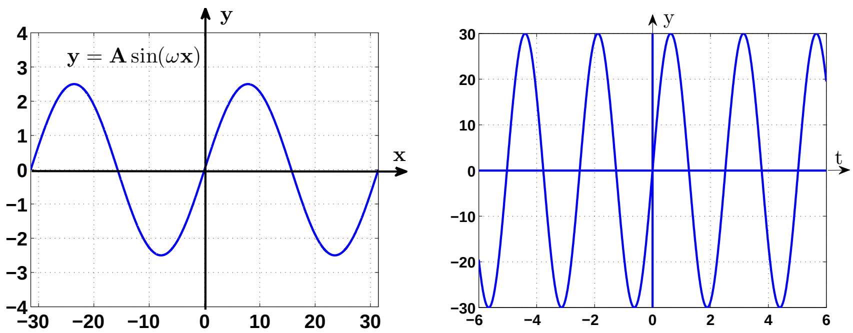
19. Figuren visar delar av kurvorna $y = \sin x$ och $y = A\sin(\omega x)$ tillsammans. Bestäm konstanterna A och ω.



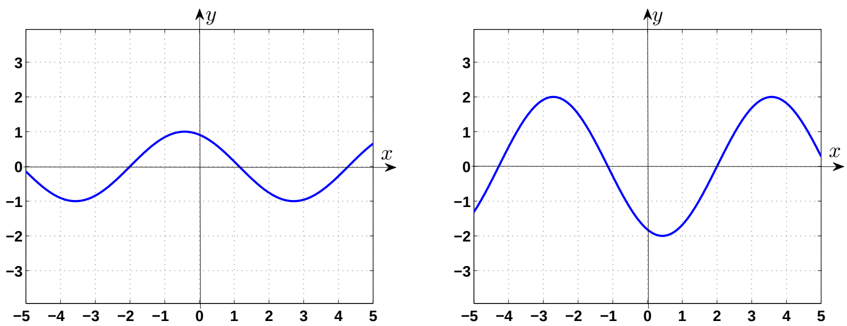
20. Figuren visar grafen till funktionen $y = A\cos(\omega x)$.
Bestäm konstanterna A och ω.



21. Figurerna visar kurvor av typen $y = A\sin(\omega x)$.
Bestäm konstanterna A och ω.



22. Figurerna visar kurvor av typen $y = A\sin(x+\phi)$.
Bestäm konstanterna A och ϕ.



4 Vektorer

Detta material bygger på valda och delvis omarbetade delar av kompendiet Vektoralgebra av Hasse Carlsson.
Dessutom har ett helt nyskrivet avsnitt om strömtriangeln lagts in.

Inledning

Du är säkert väl förtrogen med hur (reella) tal kan användas för att beskriva olika storheter inom naturvetenskap, t.ex. längd, temperatur, strömstyrka och fart. Dessa storheter kallas ofta för *skalärer*, till skillnad från de storheter som vi ska kalla vektorer.

Andra storheter har både riktning och storlek. Några sådana exempel är kraft, acceleration, hastighet och magnetfält. Sedan länge har man beskrivit dessa storheter, t.ex. krafter, med hjälp av pilar (riktade sträckor) där pilen pekar i kraftens riktning och pilens längd anger kraftens storlek. Storheter med både riktning och storlek kallas *vektorer*. Vi skall lära oss att räkna med dessa vektorer och på så sätt skapa oss ett verktyg för att angripa problem av många olika slag.

2. Vektorer - definition och räkneoperationer

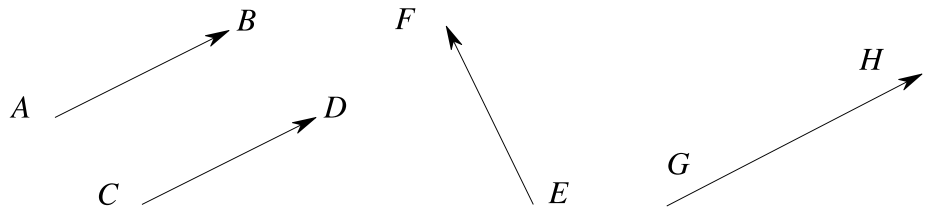
Med ledning av diskussionen i inledningen skall vi definiera vektorer och operationer på vektorer i både planet och rummet. Definitionen bygger på geometriska resultat om t.ex. parallellitet och likformighet. Omvänt kan vi därför genom att räkna med vektorer bevisa geometriska resultat.

Om man studerar hastigheten hos en båt (i synnerhet om vågorna är små) är det naturligt att bara hålla reda på hur den rör sig med avsende på två riktningar; nord-sydlig och öst-västlig. En båt kan t.ex. köra med 12 knop i nordnordvästlig riktning. Om man i stället studerar ett flygplan behöver man också hålla reda på en tredje riktning; nämligen den vertikala. Planet kan stiga 30° med hastigheten 572 km/tim i sydostlig riktning. Man säger därför att planet (inte flygplanet!) är tvådimensionellt och rummet tredimensionellt och vi använder ofta beteckningarna $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ för planet respektive rummet.

Vi skall definiera vektorer i planet och i rummet. Diskussionen i denna och de följande två paragraferna gäller både för vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$.

Definition 2.1. *Två punkter A och B bestämmer en* riktad sträcka *från A till B som betecknas* $\overrightarrow{AB}$*.*

Varje riktad sträcka bestämmer i sin tur en vektor $\mathbf{u}$*. Två sträckor som är lika långa och lika riktade bestämmer samma vektor.*



I figuren är sträckorna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ lika långa och lika riktade och bestämmer alltså samma vektor $\mathbf{u}$. Vi skriver $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Sträckan $\overrightarrow{EF}$ är lika lång som $\overrightarrow{AB}$ men inte parallell med $\overrightarrow{AB}$. Så om $\mathbf{v} = \overrightarrow{EF}$ är $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Sträckan $\overrightarrow{GH}$ är lika riktad men inte lika lång som $\overrightarrow{AB}$, så om $\mathbf{w} = \overrightarrow{GH}$ är $\mathbf{w} \neq \mathbf{u}$. Eftersom $\overrightarrow{EF}$ och $\overrightarrow{GH}$ varken är lika långa eller lika riktade så är också $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$.

Nollvektorn är den vektor som fås då start- och slutpunkt sammanfaller. Nollvektorn betecknas $\mathbf{0}$ och alltså är $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

Om $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ så är $-\mathbf{u}$ den vektor som är lika lång som $\mathbf{u}$ men motsatt riktad mot $\mathbf{u}$, dvs. $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$.

Längden av vektorn $\mathbf{u}$ betecknas $|\mathbf{u}|$.

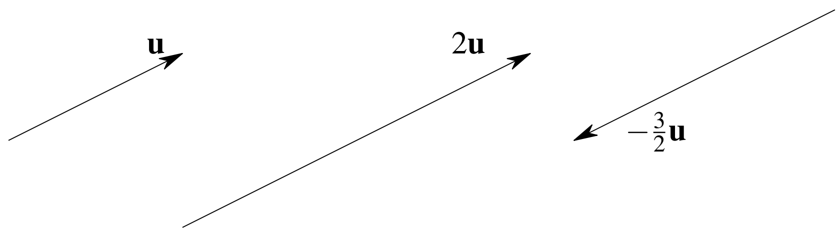
Anmärkning 2.1. Det finns många olika sätt att skriva en bokstav så att man ser att den representerar en vektor. I denna text används fetstil: $\mathbf{u}$, vilket kan vara besvärligt med papper och penna. När man skriver för hand gör man gärna istället bokstaven dubbeltecknad. Vanligt förekommande är också att använda en pil som i de riktade sträckorna i definitionen ovan, dvs $\vec{u}$.

□

2.1. Operationer på vektorer

Multiplikation av en vektor med en skalär

Definition 2.2. *Om t är ett reellt tal och $\mathbf{u}$ är en vektor så är $t\mathbf{u}$ den vektor som har längden $|t||\mathbf{u}|$ och är lika riktad som $\mathbf{u}$ om $t > 0$ och motsatt riktad mot $\mathbf{u}$ om $t < 0$. När $t = 0$ är $t\mathbf{u} = \mathbf{0}$.*



Exempel 2.1.
(1) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (2) $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$
(3) $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$ för alla t och (4) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ för alla $\mathbf{u}$.

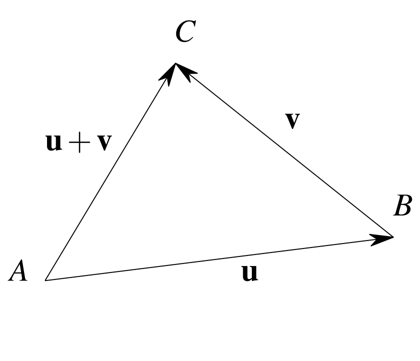
□

Vektorerna $\mathbf{u}$ och $t\,\mathbf{u}$ är alltså parallella och om $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ så kan varje vektor $\mathbf{v}$ som är parallell med $\mathbf{u}$ skrivas $\mathbf{v} = t\,\mathbf{u}$ för något t.

Addition av vektorer

Vi skall nu definiera addition av vektorer. Definitionen görs så att kraftparallellogramlagen blir uppfylld.

Definition 2.3. *Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer. Välj tre punkter A, B och C så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$. Då är $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$.*

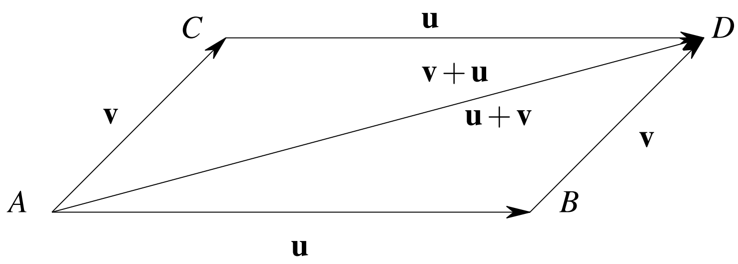


Räkneregler

(1) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ (*kommutativitet*),
(2) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ (*associativitet*),
(3) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$,
(4) $t(\mathbf{u}+\mathbf{v})=t\mathbf{u}+t\mathbf{v}$ (*distributivitet*),
(5) $(s+t)\mathbf{u}=s\mathbf{u}+t\mathbf{u}$ (*distributivitet*),
(6) $s(t\mathbf{u})=(st)\mathbf{u}$.

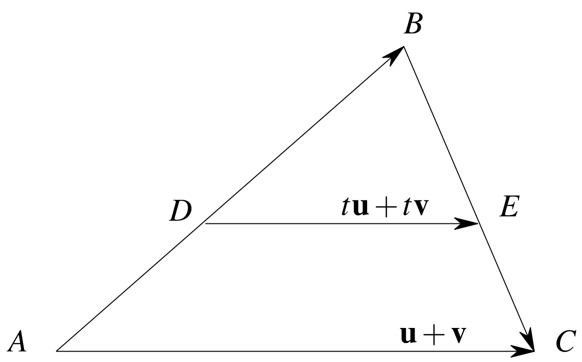
Vi visar bara (1) och (4) då $t>0$, och låter läsaren själv fundera ut varför de övriga är sanna.

Kommutativiteten följer ur följande figur.



I parallellogrammen $ABCD$ är $\mathbf{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ och $\mathbf{v}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. Så $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

Att (4) gäller följer av likformighet. Antag att $t>0$ och betrakta trianglarna ABC och DBE där $\mathbf{u}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v}=\overrightarrow{BC}$, $t\mathbf{u}=\overrightarrow{DB}$ och $t\mathbf{v}=\overrightarrow{BE}$.



Trianglarna ABC och DBE är likformiga med förhållandet $1 : t$. (Varför?) Så $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{DE}$ är lika riktade och $|\overrightarrow{DE}| = t\,|\overrightarrow{AC}|$. Det betyder att $\overrightarrow{DE} = t\,\overrightarrow{AC}$ och

$$t(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = t\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}\ .$$

□

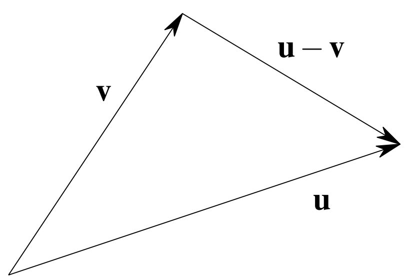
Anmärkning 2.2. Figuren i beviset av (1) visar att addition av vektorer uppfyller parallellogramlagen för krafter. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är krafter så är $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ krafternas resultant; om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ påverkar en partikel så blir effekten densamma som när partikeln bara påverkas av kraften $\mathbf{u}+\mathbf{v}$.

□

Subtraktion av vektorer

Definition 2.4. $\mathbf{u}-\mathbf{v} = \mathbf{u}+(-\mathbf{v})$.

Vi har $\mathbf{u}-\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ty om $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ så är $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$ och $\mathbf{u}-\mathbf{u} = \mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$. Observera också att $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ löser ekvationen $\mathbf{v}+\mathbf{x} = \mathbf{u}$ eftersom $\mathbf{v}+(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = (\mathbf{v}-\mathbf{v})+\mathbf{u} = \mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Så om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ placeras så att de startar i samma punkt är $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ den vektor som startar i spetsen av $\mathbf{v}$ och slutar i spetsen av $\mathbf{u}$.

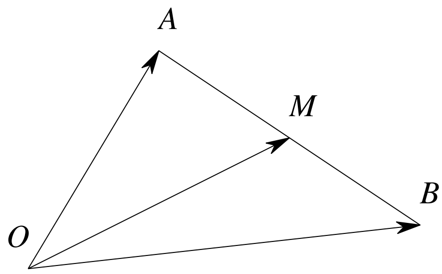


Man kan också se det genom att skriva $\mathbf{u}-\mathbf{v} = -\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

En geometrisk tillämpning

Exempel 2.2. Låt O, A och B vara tre punkter. Om M är mittpunkten på sträckan $\overrightarrow{AB}$ så gäller

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$

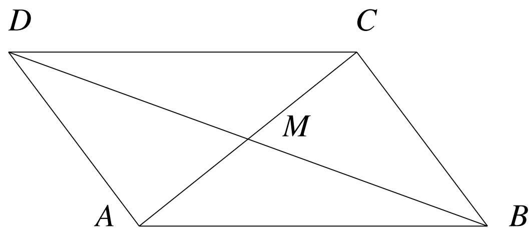


Varför? Jo, eftersom $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, så gäller

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.$$

□

Exempel 2.3. Diagonalerna i en parallellogram delar varandra mitt itu.



Påståendet innebär att diagonalernas skärningspunkt är mittpunkt både på diagonalen AC och på diagonalen BD. Så här visar man detta:

Låt M vara mittpunkten på diagonalen BD. För att visa påståendet räcker det att visa att M också är mittpunkt på diagonalen AC. (Varför?) Enligt förra exemplet är

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).$$

Men $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ så

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

dvs. M är mittpunkt på diagonalen AC. $\square$

3. Baser och koordinater

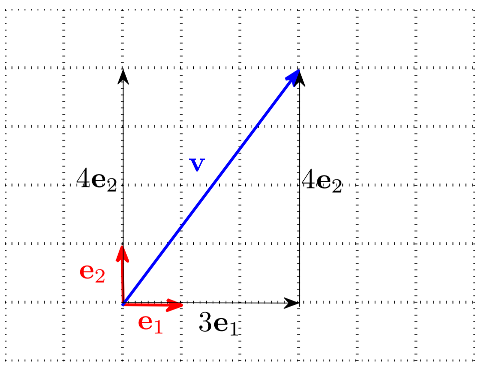
För att göra det mer praktiskt att räkna med geometriska vektorer i planet och rummet skall vi se hur man kan representera dem som par respektive tripplar av reella tal. På så sätt kan man räkna med vektorer på ett enkelt sätt med hjälp av reella tal.

3.1. Bas i planet

Definition 3.1. *Två vektorer i planet* $\mathbf{e}_1$ *och* $\mathbf{e}_2$ *som har längd 1 och är vinkelräta mot varandra sägs utgöra en* ON-bas.

Anmärkning 3.1. ON står för *ortonormerad*, vilket i sin tur är en sammandragning av *ortogonal*, som betyder vinkelrät och *normerad*, som innebär att längden av vektorerna är 1. Rent allmänt krävs av en bas att vektorerna inte är parallella och inte är nollvektorn. I detta kapitel använder vi dock bara ON-baser. $\square$

Låt $\mathbf{v}$ vara en godtycklig vektor. Placera $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{v}$ så att de börjar i samma punkt.



Med den vektor vi valt i figuren ser vi att den kan uppfattas som summan av två vektorer, parallella med var sin basvektor: $v = 3e_1 + 4e_2$. Det är lätt att förstå att varje vektor entydigt kan behandlas på detta sätt:

Om $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är en ON-bas i planet så kan varje vektor $\mathbf{v}$ entydigt skrivas

$$\boxed{\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2}$$

Om det är klart vilka basvektorerna är, skriver vi helt kort

$$\boxed{\mathbf{v} = (x, y)}$$

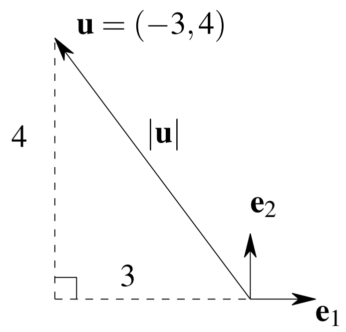
i stället för $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ och kallar x och y för $\mathbf{v}$:s *koordinater* (eller *komponenter*).

Räkneregler för vektorer i koordinatform:
Om $\mathbf{u} = (x,y)$, $\mathbf{v} = (x',y')$ och $t \in \mathbb{R}$ så gäller

$$\boxed{t\,\mathbf{u} = t\,(x,y) = (tx,ty)}$$
$$\boxed{\mathbf{u}+\mathbf{v} = (x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')}$$

Härledning: Allt följer av räknereglerna för vektorer. Vi har $t\,\mathbf{v} = t(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = tx\mathbf{e}_1 + ty\mathbf{e}_2 = (tx,ty)$ och $\mathbf{v}+\mathbf{u} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 = (x+x')\,\mathbf{e}_1 + (y+y')\,\mathbf{e}_2 = (x+x',y+y')$.

Exempel 3.1. Antag att $u = (-3,4)$ i en ON-bas. Hur lång är vektorn u?



Lösning. Vi påminner igen om att $|u|$ betyder längden av vektorn u. Pythagoras sats ger (se figuren) $|u|^2 = 3^2+4^2 = 25$ så $|u| = 5$.

Med samma resonemang ser vi generellt att om $\mathbf{u} = (x,y)$ så är

$$|u|^2 = x^2+y^2$$

$$\boxed{|u| = \sqrt{x^2+y^2}}$$

□

Exempel 3.2. Krafterna $\mathbf{F_1} = (-1,2)$ och $\mathbf{F_2} = (2,-3)$ (i Newton) verkar på en partikel. Hur stor är deras sammanlagda verkan?
Lösning. Den resulterande kraften är $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = (-1,2)+(2,-3) = (1,-1)$ så $|\mathbf{F}| = \sqrt{1+1}N=\sqrt{2}$N.

□

3.2. Bas i rummet

Vi kan göra om allt i tre dimensioner, bara vi inför en tredje basvektor.

Definition 3.2. *Tre vektorer* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *och* $\mathbf{e}_3$ *utgör en* ON-bas *för* $\mathbb{R}^3$ *om är inbördes vinkelräta och alla har längden 1.*

Om $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ är en bas i rummet kan varje vektor $\mathbf{v}$ entydigt skrivas

$$\boxed{\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}$$

Återigen tillåter vi oss det kortare skrivsättet

$$\boxed{\mathbf{v} = (x, y, z)}$$

där talen $x,\ y,\ z$ kallas *koordinaterna* för vektorn $\mathbf{v}$ och vi har räknereglerna

$$t\,(x,y,z) = (tx,ty,tz) \quad \text{och} \quad (x,y,z) + (x',y',z') = (x+x',y+y',z+z')\ .$$

Med hjälp av Pythagoras sats ser vi (hur då?) att i en ortonormerad bas ges en vektors längd av

$$|\mathbf{u}|^2 = |(x,y,z)|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

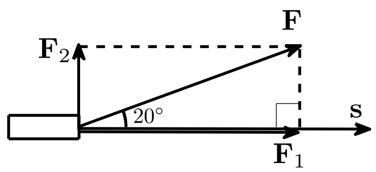
och

$$\boxed{|u| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

4. Skalärprodukt

I det här avsnittet skall vi behandla problem som har att göra med vinklar mellan vektorer. Ett viktigt tillämpningsområde är fysiken och vi börjar med ett fysikaliskt exempel.

Exempel 4.1. En låda släpas över ett golv genom att man drar i ett rep som lutar 20° mot horisontalplanet. Den kraft F som verkar på repet är 200 N i repets riktning. Om lådan släpas 10 m utvecklar kraften ett arbete (som motsvarar den utvecklade friktionsvärmen). Beräkna arbetet.

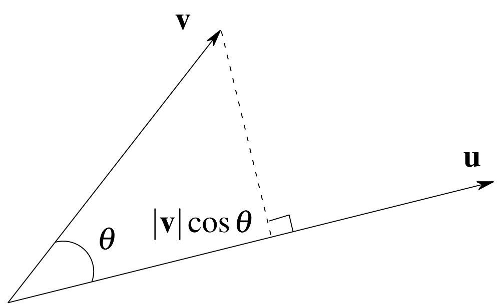


Lösning: Arbetet är produkten av den kraft F_1 som verkar i rörelseriktningen och förflyttningens längd. Vi delar därför upp F i komposanter F_1 utmed förflyttningen och F_2 vinkelrätt mot denna. Då är $F = F_1 + F_2$ och hela arbetet uträttas då av F_1. Om vi ser förflyttningen som en vektor s, så är arbetet

$$W = |F_1| \cdot |s| = 200 \cos 20^\circ \cdot 10J \approx 1879J$$

□

Efter detta preludium är det dags att definiera *skalärprodukten* mellan två vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Med *vinkeln* θ mellan vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, (ingen får vara nollvektorn), menas den kortaste vinkeln som den ena vinkeln kan vridas för att få samma riktning som den andra. Vi tänker oss då att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ placeras så att de utgår från samma punkt.



Definition 4.1. Skalärprodukten *av vektorerna* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är*

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta\,,$$

där θ *är vinkeln mellan* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$, $0 \le \theta \le \pi$. *Om* $\mathbf{u}$ *eller* $\mathbf{v}$ *är* $\mathbf{0}$ *så är* $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$.

Observera att definitionen är gjord så att $W = \mathbf{F} \bullet \mathbf{s}$ i det inledande exemplet.

Anmärkning: Skalärprodukten betecknas med en punkt, vilket skulle kunna förväxlas med symbolen för multiplikation av två tal. När det står mellan två vektorer ska det emellertid alltid tolkas som skalärprodukt. För att uppmärksamma den speciella betydelsen, använder vi här en väl tilltagen punkt. I många texter gör man ingen sådan skillnad i punktens utseende, utan sammanhanget får avgöra dess betydelse.

Räkneregler.
(1) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$ (*kommutativitet*),
(2) $(t\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})$,
(3) $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$ (*distributivitet*),
(4) $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \bullet \mathbf{u}$,
(5) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$ om och endast om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vinkelräta.

Några viktiga egenskaper hos skalärprodukten:

- Skalärproduktens värde maximalt lika med produkten av de ingående vektorernas längder, detta inträffar då vektorerna har samma riktning.
- Skalärproduktens värde minimalt lika med minus produkten av de ingående vektorernas längder, detta inträffar då vektorerna har motsatta riktningar.
- Skalärprodukten av två vinkelräta vektorer är noll.
- Om vektorerna bildar spetsig vinkel, är deras skalärprodukt positiv.
- Om vektorerna bildar trubbig vinkel, är deras skalärprodukt negativ.

Du bör själv övertyga dig om att (1),(2),(4) och (5) gäller. Räknelag (3) visas i appendix. $\square$

För att praktiskt räkna med skalärprodukt behöver vi veta vad $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ blir i koordinater i en ON-bas.

Skalärprodukten i koordinatform:
Låt $\mathbf{u} = (x,y,z)$ och $\mathbf{v} = (x',y',z')$ i en ON-bas. Då gäller

$$\boxed{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = xx' + yy' + zz'}$$

I $\mathbb{R}^2$ gäller $(x,y) \bullet (x',y') = xx' + yy'$.

Härledning:
För en ON-bas gäller $\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{e}_3 = 1$ och $\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_3 = 0$. (Varför?) Så

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \bullet (x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3) \\
&= xx'\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_1 + yy'\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_2 + zz'\mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{e}_3 \\
&+ (xy' + yx')\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_2 + (xz' + x'z)\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_3 + (yz' + y'z)\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_3 \\
&= xx' + yy' + zz'.
\end{aligned}$$

Exempel 4.2. $(3,3) \bullet (5,2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 21.$ □

Om två vektorer ges i koordinatform (ON-bas) så kan man lätt räkna ut vinkeln mellan dem:

$$u \bullet v = |u||v| \cos\theta \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{u \bullet v}{|u||v|}$$

och vi vet nu hur skalärprodukten och längderna beräknas med hjälp av koordinaterna.

Exempel 4.3. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} = (1,2,2)$ och $\mathbf{v} = (-2,1,-2)$.
Lösning. Vi har

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{(-2^2) + 1^2 + (-2)^2} = 3 \quad \text{och}$$

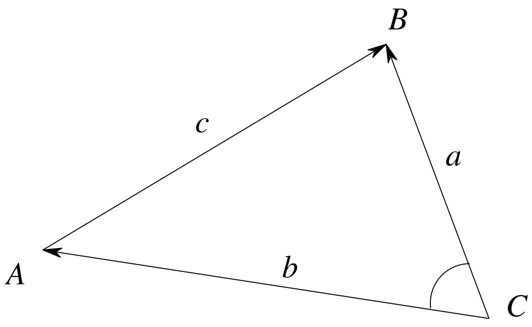
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 1(-2) + 2 \cdot 1 + 2(-2) = -4$$

Eftersom $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta$ får vi $\cos\theta = -\dfrac{4}{3 \cdot 3} \approx -0,4444$ och $\theta \approx 116,4°$. □

Exempel 4.4. Vektorerna $(5,2)$ och $(-2,5)$ är vinkelräta. Med hjälp av skalärprodukt ser vi detta genast eftersom $(5,2) \bullet (-2,5) = 5(-2) + 2 \cdot 5 = 0$. □

Här följer två exempel på hur man kan bevisa vissa geometriska satser med hjälp av skalärprodukt.

Exempel 4.5. Cosinusatsen.
I en triangel gäller $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

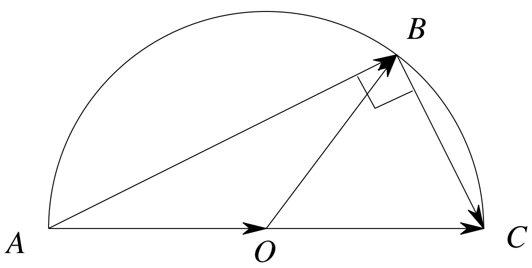


Bevis. Eftersom $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ och $\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=ab\cos C$ så är

$$\begin{aligned} c^2 &= \overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})\bullet(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}) \\ &= \overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CA} \\ &= a^2-2ab\cos C+b^2\,. \end{aligned}$$

□

Exempel 4.6. Periferivinkeln i en halvcirkel är rät.



Bevis. Vi skall visa att $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}=0$. Men $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$ och $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$. Så

$$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\bullet(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$$

$$=\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO}\bullet\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OB}\,.$$

Eftersom $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$ får vi om cirkelns radie är R

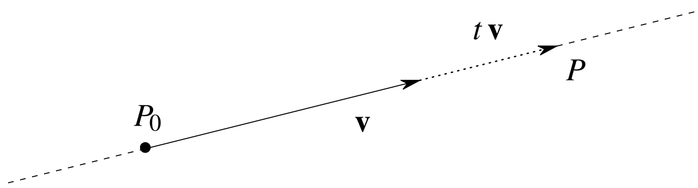
$$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}\bullet\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}\bullet\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OB}=R^2-R^2=0\,.$$

□

5. Räta linjen

I gymnasiet studerar man räta linjens ekvation på formen $y = kx + m$, där k är en konstant som uttrycker hur linjen lutar i förhållande till x-axeln och m ger y-koordinaten för linjens skärningspunkt med y-axeln. En linje som är parallell med y-axeln skrivs istället $x = a$, där a är den gemensamma x-koordinaten för linjens alla punkter. Detta kan repeteras i Sommarmatte 1 (finns tillgänglig på kurshemsidan), avsnitt 3.2. Här ska vi se ett annat sätt att beskriva räta linjen, där vi tar hjälp av vektorer. I detta avsnitt löser vi också några ekvationssytem, så det kan behövas en repetition av hur man löser sådana: se Ekvationer, avsnitt 2.4 (som är hämtat från Sommarmatte del 1).

En (rät) linje i $\mathbb{R}^2$ bestäms av en punkt P_0 på linjen och en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ som anger linjens riktning. Vektorn $\mathbf{v}$ kallas för en *riktningsvektor* för linjen.



En godtycklig punkt på linjen kan skrivas

$$P = P_0 + t\mathbf{v},$$

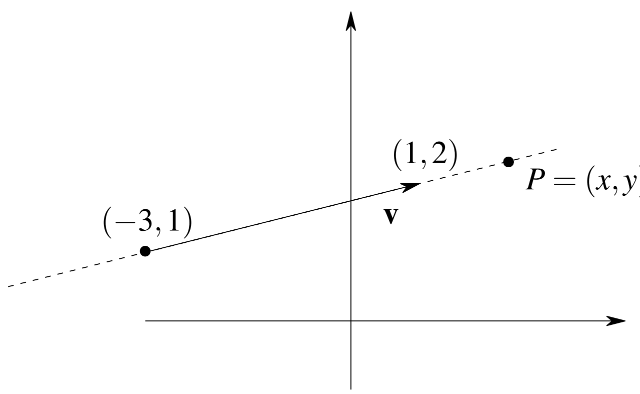
för något reellt tal t. Om $P_0 = (x_0, y_0)$,$\mathbf{v} = (a, b)$ och $P = (x, y)$ så gäller $(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$ eller

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb. \end{cases}$$

Detta kallas för linjens ekvation på *parameterform*.

Exempel 5.1. Bestäm ekvationen för linjen genom punkterna $(1, 2)$ och $(-3, 1)$.

Lösning.



Vektorn $\mathbf{v}$ från $(-3,1)$ till $(1,2)$ är en riktningsvektor för linjen. Vi har $\mathbf{v} = (1,2) - (-3,1) = (4,1)$. Så om $P_0 = (-3,1)$ ger $P = P_0 + t\mathbf{v}$

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 1 + t\,. \end{cases}$$

Anm: Genom att lösa ut t ur andra ekvationen, $t = y - 1$ och sätta in detta i den första, $x = -3 + 4(y-1)$, kan vi få ut den tidigare kända $y = kx + m$-varianten: $y = \frac{1}{7}x + \frac{4}{7}$.

$\square$

Exempel 5.2. Var skär linjerna

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \end{cases}$$

varandra?

Lösning: Observera att parametrarna t i de båda ekvationerna är oberoende av varandra. Om vi vill hantera två linjer samtidigt, bör vi därför ha olika namn på parametern, ta t. ex. s i den första och t i den andra. Om (x,y) ligger på båda linjerna måste det då finnas ett s och ett t så att $(x,y) = (1+s, 2+2s)$ och $(x,y) = (-1+t, t)$. Detta ger

$$\begin{cases} 1 + s = -1 + t \\ 2 + 2s = t \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} s - t = -2 \\ 2s - t = -2 \end{cases}.$$

Subtraherar vi den första ekvationen från den andra får vi det ekvivalenta ekvationssystemet

$$\begin{cases} s - t = -2 \\ s = 0 \end{cases},$$

som har lösningen $s=0,t=2$. Detta ger $x=1,y=2$ så linjernas skär varandra i punkten $(1,2)$.

□

För att beskriva samtidig rörelse av två partiklar längs två räta linjer, behöver man dock ha en gemensam parameter t (tiden). Om skärningpunkten mellan linjerna svarar mot samma värde på t innebär detta att vi har kollision mellan partiklarna i den tidpunkten. Om skärningspunkten svarar mot olika t, betyder det alltså att partiklarna befinner sig i skär-ningspunkten vid olika tidpunkter. För fartyg som rör sig i rätlinjiga kurser måste man i princip också också ta hänsyn till fartygens längder.

Exempel 5.3. I ett koordinatsystem (skala i nautiska mil) har fartyg A vid tiden $t=0$ (tids-enhet timmar) positionen $(7,-26)$ och hastighetsvektorn $(7,11)$ (enhet knop). Fartyg B har vid tiden $t=0$ positionen $(74,-7)$ och hastighetsvektorn $(-8,9)$. Kommer de båda fartygen att kollidera om de fortsätter med oförändrade kurser och hastigheter?

Lösning: Vi tecknar först de båda linjerna i parameterform

$$\begin{cases} x=7+7t \\ y=-26+11t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x=74-8t \\ y=-7+9t \end{cases}$$

Vi byter nu namn på parametern i fartyg B:s linje, säg s. Då får vi följande ekvationer för skärningspunkten:

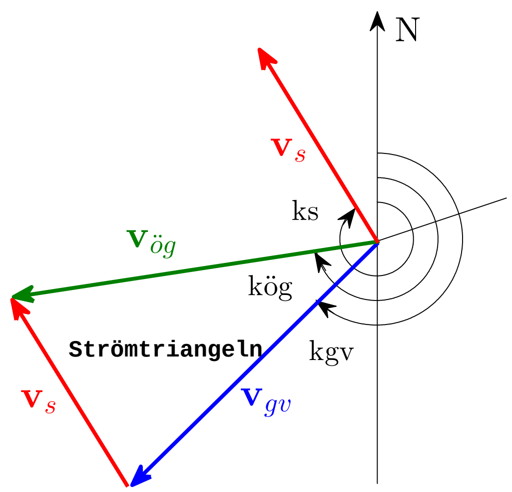
$$\begin{cases} 7+7t=74-8s \\ -26+11t=-7+9s \end{cases} \iff \begin{cases} 8s+7t=67 \\ 9s-11t=-19 \end{cases} \iff \begin{cases} 88s+77t=737 \\ 63s-77t=-133 \end{cases}$$

Addera ekvationerna ledvis: $151s=604$ ger $s=4$. Efter insättning i t. ex. $8s+7t=67$ får vi ut $t=5$. Vi får nu skärningspunkten genom insättning i linjernas ekvationer: $x=7+7t=42$, $y=-26+11t=29$ respektive $x=74-8s=42$, $y=-7+9s=29$. Linjernas skärningspunkt är alltså $(42,29)$. Eftersom t och s står för tider så befinner sig fartyg A i skärningspunkten efter exakt 5 timmar, medan fartyg B når platsen efter 4 timmar. Eftersom tidsskillnaden är så stor, behöver vi inte blanda in fartygens längder, men man kan annars med hjälp av farter och fartygslängder räkna ut mellan vilka tidpunkter för- och akterstäven hos respektive fartyg befinner sig i skärningspunkten och se om dessa tidsintervall går in i varandra. □

6. Strömtriangeln

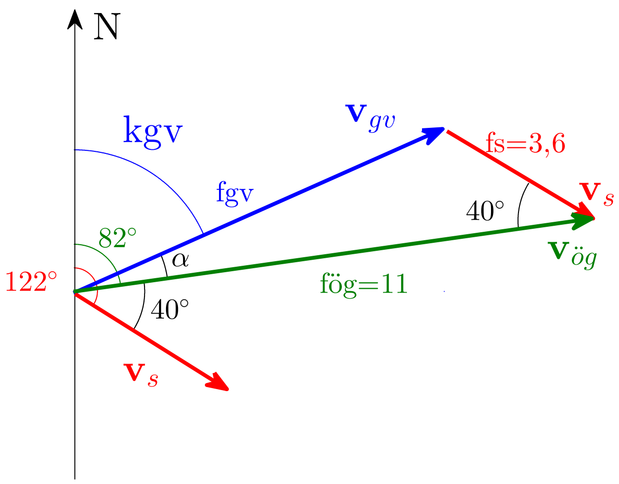
Som tidigare nämnts är hastighet ett exempel på en vektorstorhet. För att fullständigt beskriva en hastighet, behöver man ange dess storlek och dess riktning. I fysiken talar man om *hastighet* när man menar vektorn och om *fart* när man menar dess storlek: exempelvis farten 5 m/s och riktningen sydost i markplanet. Till sjöss anger man riktningen som *kursen*, dvs vinkeln räknad medurs i förhållande till nordriktningen (åtminstone så länge man har hastigheter i horisontalplanet). Riktningar för hastigheter hos fartyg och vattenströmmar avser alltid *mot* vilket håll rörelsen sker, men märkligt nog är det omvänt när det gäller vindar: riktningen hos en vindhastighet avser vilket håll vinden kommer *ifrån*.

För ett fartyg finns tre för dess rörelse intressanta hastigheter: $\mathbf{v}_{gv}$ = hastigheten genom vatt-net, $\mathbf{v}_{ög}$ = hastigheten över grund och $\mathbf{v}_s$ = strömmens hastighet. Deras storlekar betecknas fgv = $|\mathbf{v}_{gv}|$ = farten genom vatten, fög = $|\mathbf{v}_{ög}|$ = farten över grund och fs = $|\mathbf{v}_s|$ = strömmens fart. Deras kurser betecknas kgv = kursen genom vatten, kög = kursen över grund och ks = strömmens kurs. Sambandet mellan dem är en vektoraddition: $\mathbf{v}_{ög} = \mathbf{v}_{gv} + \mathbf{v}_s$.



När man räknar på dessa hastigheter är det ofta praktiskt att sätta dem i en triangel, som figuren visar. Triangeln illustrerar vektoradditionen och sedan är det som gjort för att använda våra triangelsatser.

Exempel 6.1. Från ett fartyg ser man en ö i kursen 82°. Strömmens fart är 3,6 knop och dess riktning är 122°. Beräkna den fart och kurs fartyget ska hålla genom vattnet om dess rörelse över grund ska vara riktad rakt mot ön med farten 11 knop.



Lösning: Vi känner alltså fög = 11 knop, kög = 82°, fs = 3,6 knop, ks = 122° (se figuren). Vi vill beräkna fgv och kgv. Först konstaterar vi att en av strömtriangelns vinklar är $ks - k\ddot{o}g = 122° - 82° = 40°$ (de röda pilarna är ju parallella!). Med hjälp av cosinussatsen kan vi nu beräkna fgv:

$$(fgv)^2 = 11^2 + 3,6^2 - 2 \cdot 11 \cdot 3,6 \cos 40°$$

$$fgv \approx 8,56$$

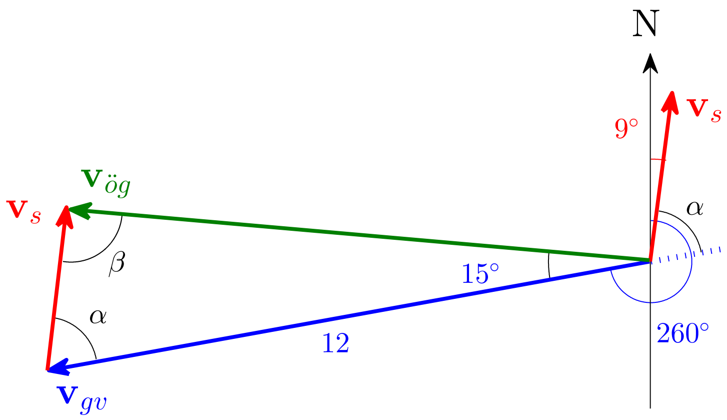
Nu kan vi få triangelvinkel $\alpha = k\ddot{o}g - kgv$ med sinussatsen:

$$\frac{\sin\alpha}{3,6} = \frac{\sin 40°}{fgv} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3,6\sin 40°}{fgv} \Rightarrow \alpha \approx 15,7°$$

Därmed är kgv=kög-$\alpha \approx 82° - 15,7° = 66,3°$.

Svar: Håll farten 8,6 knop och kursen 66° genom vattnet. □

Exempel 6.2. Ett fartyg rör sig med farten 12 knop genom vattnet och i kompassriktningen 260° (=kgv). Strömmens riktning är 9° och fartygets rörelseriktning gentemot land är 275° (=kög). Beräkna farten över grund och strömmens fart.



Lösning: Om vi kan bestämma strömtriangelns vinklar, kan vi också bestämma dess återstående sidor, och det är ju dessa som söks. En av vinklarna är kög-kgv=15°. Om vi förlänger $\mathbf{v}_{gv}$ åt motsatt håll, får vi en linje i kurs kgv-180° $= 80°$. Vi kan då se att $\alpha = 80° - ks = 71°$. Därmed blir den återstående vinkeln $\beta = 180° - 15° - 71° = 94°$. Sinussatsen säger nu

$$\frac{fg}{\sin 71°} = \frac{fs}{\sin 15°} = \frac{12}{\sin 94°}$$

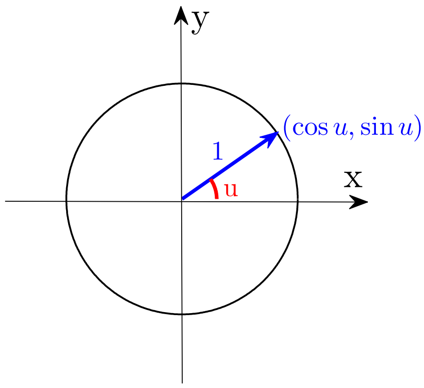
vilket ger

$$fg = \frac{12 \sin 71°}{\sin 94°} \approx 11,37 \qquad fs = \frac{12 \sin 15°}{\sin 94°} \approx 3,11$$

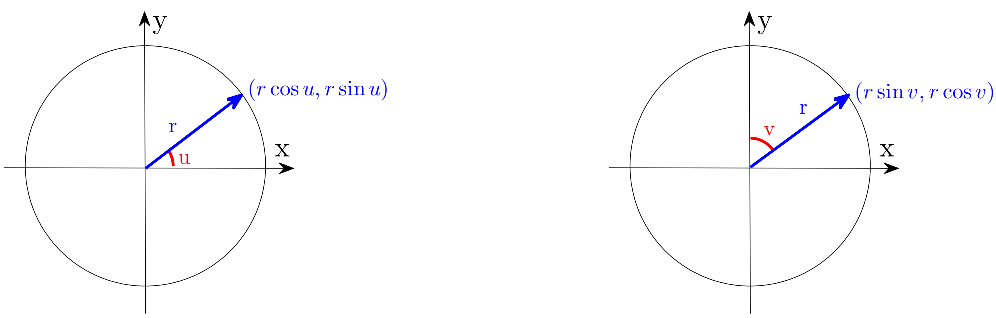
Svar: Farten över grund är 11,4 knop, strömmens fart är 3,1 knop. □

Hastigheter i koordinatform

Ett annat sätt att behandla hastigheterna i föregående avsnitt är att använda de trigonometriska funktionerna för att beskriva x- och y-koordinaterna separat. Vi repeterar definitionen av sinus och cosinus i enhetscirkeln. En punkt på enhetscirkeln med riktningsvinkeln u enligt vår vinkelkonvention (utgå från x-axeln, positiv vinkel moturs, negativ medurs) kan också beskrivas med en vektor från origo till punkten. Denna vektor får då koordinaterna $(\cos u, \sin u)$.



Om vi byter till en annan cirkel med radie r och medelpunkt i origo, blir koordinaterna $(x, y) = (r\cos u, r\sin u)$. r och u kallas *polära koordinater* för punkten/vektorn, till skillnad från de vanliga *rektangulära koordinaterna* x och y. Om vi väljer att använda sjöfartens vinkelmätning där kursen v räknas från y-xeln (nordriktningen) medurs, så behöver vi bara byta plats på sinus och cosinus. Då gäller nämligen att $\cos u = \sin v$ och $\sin u = \cos v$.



Exempel 6.3. Vi testar detta sätt att räkna på exempel 5.1. Här kan vi ge de kända hastigheterna i koordinatform:

$$\mathbf{v}_{\ddot{o}g} = (11\sin 82^\circ, 11\cos 82^\circ),\ \mathbf{v}_s = (3.6\sin 122^\circ, 3.6\cos 122^\circ)$$

Eftersom $\mathbf{v}_{\ddot{o}g} = \mathbf{v}_{gv} + \mathbf{v}_s$, så har vi

$$\mathbf{v}_{gv} = \mathbf{v}_{\ddot{o}g} - \mathbf{v}_s = (11\sin 82^\circ - 3.6\sin 122^\circ, 11\cos 82^\circ - 3.6\cos 122^\circ) \approx (7.84, 3.44)$$

Genom att använda dessa koordinater (a,b) kan vi (rita figur!) bestämma både fart och kurs:

$$fgv = |\mathbf{v}_{gv}| = \sqrt{a^2+b^2} \approx 8,56$$

$$\tan(kgv) = \frac{a}{b} \ \Rightarrow\ kgv \approx 66,3^\circ$$

Om någon av koordinaterna blir negativ (då blir kursen en vinkel större än 90°), är det extra viktigt att rita figur, så att man får kursen rätt.

Ett annat sätt att beräkna kursen, är att använda skalärprodukten. T. ex. kan vi beräkna vinkeln α mellan $\mathbf{v}_{\ddot{o}g}$ och $\mathbf{v}_{gv}$:

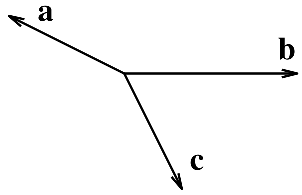
$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}_{\ddot{o}g} \bullet \mathbf{v}_{gv}}{|\mathbf{v}_{\ddot{o}g}||\mathbf{v}_{gv}|} = \frac{(10.89, 1.53) \bullet (7.84, 3.44)}{11 \cdot 8.56} \approx 0.963 \ \Rightarrow\ \alpha \approx 15,7^\circ,\ kgv = k\ddot{o} - \alpha \approx 66,3^\circ$$

Vinkeln α blir då automatiskt rätt, oberoende av kvadranter. □

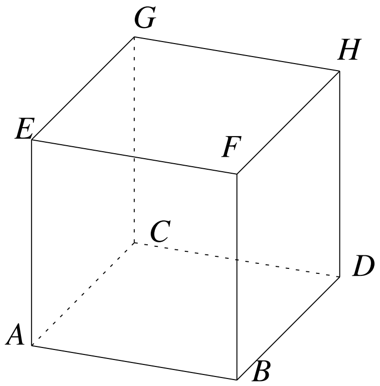
I exempel 5.2 är det svårare att räkna på detta sätt, eftersom vi inte har någon av vektorerna bestämd till både längd och riktning.

Övningar

1. Rita (a) $\mathbf{2a}+\mathbf{b}$, (b) $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$ och (c) $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, där $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ ges av figuren:



2. Låt $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ och $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AE}$ i följande kub.



   Bestäm tal x, y och z så att $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ då

   (a) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$, (b) $\mathbf{v} = \overrightarrow{EH}$, (c) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AG}$,

   (d) $\mathbf{v} = \overrightarrow{HA}$, och (e) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HA}$.

3. En motorbåt går i stillastående vatten med farten 6 m/s. Båten körs i en älv där vattnet strömmar rakt söderut med farten 2 m/s.
   (a) Bestäm båtens hastighet (fart och riktning i förhållande till land) om den styrs i rakt östlig riktning.
   (b) I vilken kurs skall båten styras för att röra sig rakt öster ut?

4. Antag att $\mathbf{u} = (1,2)$ och att $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (3,4)$. Vad är då $\mathbf{v}$?

5. Antag att $\overrightarrow{AB} = (2,1)$, $\overrightarrow{AC} = (3,2)$. Bestäm $\overrightarrow{BC}$.

6. Bestäm $\overrightarrow{BC}$ om $\overrightarrow{AB} = (1,2,1)$ och $\overrightarrow{AC} = (2,1,3)$.

7. Sätt $\mathbf{u} = (-1,2,0)$, $\mathbf{v} = (2,-1,3)$. Beräkna $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

8. Bestäm ett tal a så att vektorerna $(a, 2+a, 6)$ och $(2,1,-3)$ är parallella.

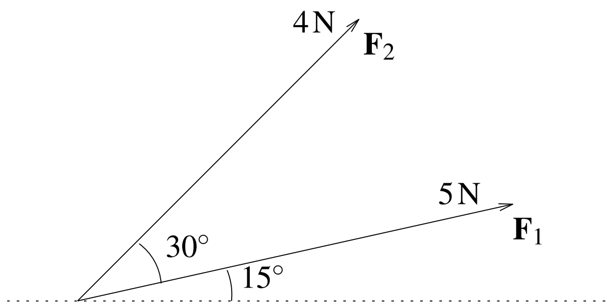
9. Bestäm en vektor $\mathbf{u}$ som har längden 1 och är parallell med $(-1,2,2)$.

10. Bestäm längderna av vektorerna
(a) $(-1,-2,-3)$, (b) $(1,1,1)$ och (c) $(-1,2,2)$.

11. Krafterna $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$ verkar på en partikel.

    (a) Bestäm storleken av krafternas resultant om $\mathbf{F}_1 = (1,-3,4)$ och $\mathbf{F}_2 = (5,9,2)$,

    (b) Bestäm storlek och riktning av krafternas resultant om $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$ ges av följande figur:



(ON-bas, SI-enheter.)

12. Vilka av följande par av vektorer är vinkelräta?

    (a) $(-1,2,2), (2,2,-1)$, (b) $(2,1,1), (2,1,-5)$ och (c) $(1,1,1), (2,-1,-1)$.

13. Bestäm vinkeln mellan vektorerna (a) $\mathbf{u} = (2,2,1)$, $\mathbf{v} = (1,-1,0)$,
(b) $\mathbf{u} = (-1,2,2)$, $\mathbf{v} = (1,1,4)$ och (c) $\mathbf{u} = (3,2,1)$, $\mathbf{v} = (1,2,3)$.

14. Bestäm vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{2b} - \mathbf{a}$ då $\mathbf{a} = (2,-3,4)$ och $\mathbf{b} = (3,4,0)$.

15. Bestäm en vektor som är vinkelrät mot
(a) $(2,-3)$, (b) (a,b), och (c) $(3,4,-2)$.

16. En triangel har hörnen $(2,1,3)$, $(-1,4,2)$ och $(0,6,5)$. Är triangeln rätvinklig?

17. Kraften $(3,-4,2)$ verkar på en kropp som rör sig rätlinjigt från punkten $(-1,3,2)$ till

    (a) $(1,4,5)$, (b) $(-3,2,3)$ och (c) (0,5,3).

    Beräkna ändringen i partikelns rörelseenergi, dvs det arbete som kraften uträttar på partikeln.

18. Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkterna $(0,3)$ och $(-1,1)$.

19. Bestäm linjen genom punkterna $(1,2)$ och $(-2,3)$ på parameterform och parameterfri form.

20. Vad är ekvationen för den linje som går genom punkten $(2,1)$ och är vinkelrät mot linjen $3x+y=3$?

21. Var skär linjerna $(x,y)=(1,0)+t(1,-3)$ och $(x,y)=(2,3)+t(2,-3)$ varandra?

22. Bestäm skärningspunkten för de två linjerna $L_1 : (x,y,z)=(1,0,4)+t(1,-1,2)$ och $L_2 : (x,y,z)=(0,1,0)+t(1,-1,3)$. Detta är räta linjer i $\mathbb{R}^3$ - deras parameterekvationer är helt analoga med fallet $\mathbb{R}^2$ som vi behandlat i detta avsnitt.

23. En partikel rör sig rätlinjigt med konstant hastighet. Den startar i punkten $(1,2,3)$. Efter en halv minut befinner den sig i $(2,2,2)$. Var befinner den sig efter 10 minuter?

24. Måste två ickeparallella linjer i (a) $\mathbb{R}^2$, (b) $\mathbb{R}^3$, skära varandra?

25. Ett fartyg håller kursen 178° relativt land och 172° över vatten, farten över grund är 17.0 knop och farten genom vatten är 18.0 knop. Beräkna strömmens fart och riktning.

26. Ett fartyg håller farten 16 knop och kursen 185°, båda i förhållande till vattnet. Strömmen har vid detta tillfälle farten 3,6 knop och kursen 123°. Beräkna fartygets fart och kurs över grund.

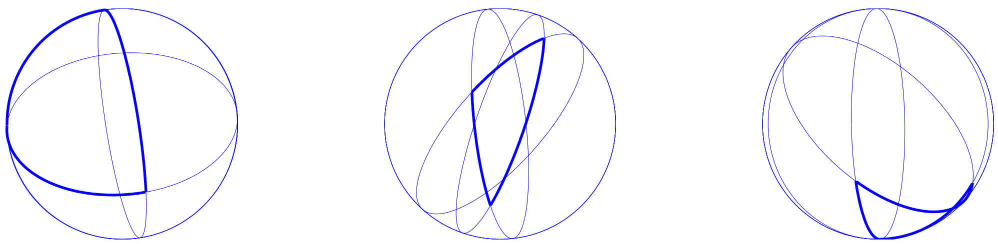
27. Ett fartyg mäter upp sin fart och kurs till 15 knop och 255° gentemot land, strömmens fart och kurs är 4,2 knop och 193°. Beräkna fartygets fart och kurs genom vattnet.

28. Ett fartyg mäter upp sin fart och kurs genom vattnet till 10 knop och 80°. Farten över grund är 9 knop och strömmens fart är 3 knop. Beräkna fartygets kurs över grund och strömmens kurs.

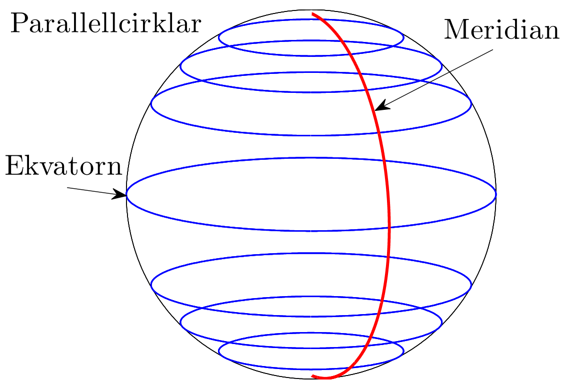
5. Sfärisk trigonometri

Inledning

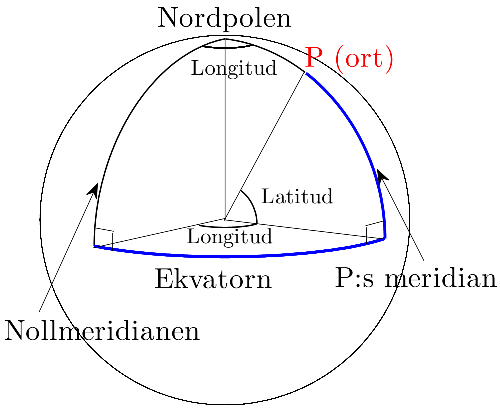
Vi vill använda den sfäriska trigonometrin för beräkningar på storcirkelrutter längs jordytan (för sjöfart och luftfart). En *storcirkel* är en cirkel på sfären vars medelpunkt sammanfaller med sfärens medelpunkt. *Om man vill förflytta sig på sfären mellan två av dess punkter, så är den kortaste vägen alltid en storcirkelbåge*. I den sfäriska trigonometrin studerar man sambandet mellan sidor och vinklar i *sfäriska trianglar*, dvs trianglar vilkas sidor utgörs av *storcirkelbågar* på en sfär.



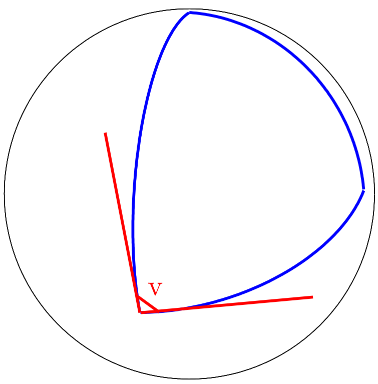
Andra cirklar än storcirklar på sfären har mindre radier och kallas därför småcirklar. Observera att småcirkelbågar aldrig är sidor i sfäriska trianglar!
Vi väljer en axelriktning uppåt i figuren och använder oss av latitud och longitud för att ange lägen på sfären. En viktig typ av cirklar är *parallellcirklarna*, dvs cirklar med konstant latitud. Endast ekvatorn är en storcirkel, övriga parallellcirklar är småcirklar. En *meridian* är en halv storcirkel med konstant longitud.



Även om det troligen är bekant för läsaren, summerar vi lite om latitud och longitud. För en ort *P* ser vi hur dessa vinklar refererar till läget för två fundamentala storcirklar: ekvatorn respektive nollmeridianen (genom Greenwich). Latituden anges positiv norrut, negativ söderut (eller så markerar man med N eller S). Den varierar därmed mellan -90° och 90° (polerna). Longituden anges positiv österut, negativ västerut (eller så markerar man med E eller W). Longituden varierar mellan -180° och 180°.

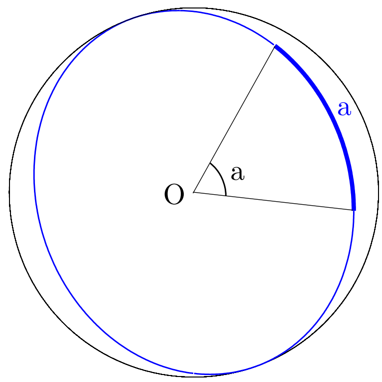


När vi talar om *vinkeln* mellan två skärande storcirklar menar vi vinkeln mellan cirklarnas tangenter i skärningspunkten. I figuren nedan markeras en hörnvinkel i en sfärisk triangel.

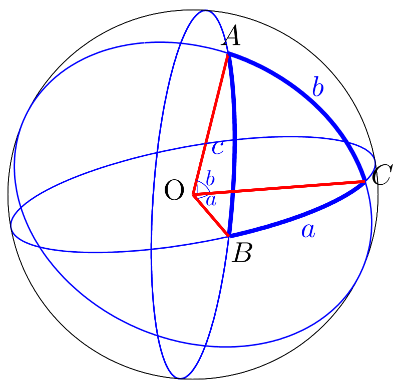


Anm: Denna vinkel är också vinkeln mellan de plan som de två storcirklarna ligger i. I denna kurs har vi dock inte arbetat med plan och deras inbördes vinklar och vi behöver inte göra det heller i fortsättningen.

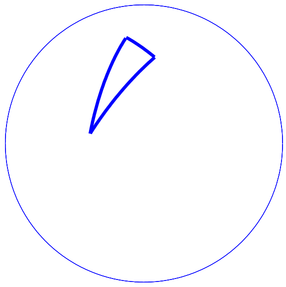
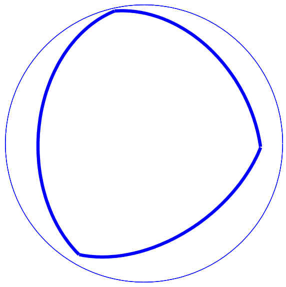
Om sfärens radie sätts till 1 och om vinkeln mäts i *radianer*, så är storcirkelbågens längd lika med centrumvinkeln. Om man istället räknar med vinkelenheten *minut*, där 1' (1 minut) =1/60 grad, så får man direkt storcirkelbågens längd på jordsfären i nautiska mil (nautisk mil kallas ju också för distansminut!). I fortsättningen anger vi därför storcirkelbågen som en vinkel (se figuren nedan!), och kan då lätt tolka den som en distans: är t ex bågen $60° = 3600'$ så är distansen längs storcirkeln 3600 M (= nautiska mil).



I fortsättningen är det underförstått att alla storcirkelbågar och sfäriska trianglar ligger på en *sfär med radien 1*. Vi använder en standard för beteckningar motsvarande den vi hade i den plana trigonometrin. Som framgår av figuren nedan betecknas den sfäriska triangelns hörn och hörnvinklar med A, B och C, medan de motstående sidorna betecknas a, b och c - de uttrycks också med vinkelmått enligt föregående. Sfärens medelpunkt är O.



Observera att vinkelsumman i en sfärisk triangel alltid är *större* än 180°! Den kan i själva verket närma sig 540°. Om triangeln är mycket liten, är den nästan plan och vinkelsumman är då obetydligt mer än 180°. Den vänstra figuren visar en sådan triangel, den högra visar en triangel vars vinkelsumma är betydligt större än 180°. En stor vinkelsumma svarar alltid mot en stor omkrets av den sfäriska triangeln.

Anmärkning: Det finns en enkel formel som ger oss den sfäriska triangelns area T (dvs arean av den sfäriska yta som begränsas av den sfäriska triangeln), den s. k. Girards formel:

$$T = A + B + C - \pi$$

Här måste *vinklarna anges i radianer* (det går förstås med grader, men då blir formeln fulare). Om det gäller att beräkna arean av en sådan triangel på en sfär av radien R, behöver man bara multiplicera med R^2. Vi kommer knappast att använda formeln i denna kurs, men för den intresserade finns beviset av Girards formel i Appendix.

För plana trianglar är det väl känt att storleksordningen mellan sidorna är densamma som mellan de motstående vinklarna. Motsvarande kan visas gälla även för sfäriska trianglar:

$$a < b \iff A < B$$

$$a = b \iff A = B$$

En skillnad gentemot plana trianglar är värd att nämna. Om man känner alla sidorna i en plan triangel, kan man bestämma alla triangelns vinklar (med cosinussatsen). Om man däremot känner alla vinklarna, kan man bara bestämma förhållandet mellan sidorna. Det finns då likformiga trianglar som har motsvarande vinklar lika. För sfäriska trianglar däremot, kan man både bestämma vinklarna när man känner alla sidorna och bestämma sidorna när man känner alla vinklarna. Det finns alltså inte två likformiga sfäriska trianglar med alla motsvarande vinklar lika men med olika stora sidor. Detta hänger förstås ihop med att de sfäriska trianglarna ligger i en sfärisk yta med bestämd radie. Om man reser till månen, kan man på dess yta hitta en sfärisk triangel som är likformig med en på jordytan men har mindre sidor. I den sfäriska trigonometrin måste man dock hålla sig till samma sfäriska yta för att kunna räkna på ett rimligt sätt, det naturliga valet av radie blir då 1 (som vi ju redan har valt).

Några exempel på problem som kan lösas med sfärisk trigonometri:
Man färdas på havet längs storcirkeln mellan två punkter A och B med givna latituder och longituder. Hur långt är då avståndet mellan A och B längs denna rutt? Vilken kurs ska man starta i och vilken kurs håller man då man når B? Var på resan finns den nordligaste eller sydligaste punkten och på vilken latitud? Ytterligare problemtyper kommer att dyka upp i senare navigationskurser.

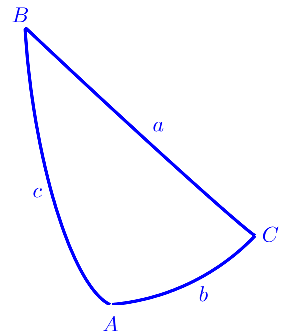
För att kunna lösa dessa och andra problem, behöver vi ett par satser. Dessa motsvarar sinus- och cosinussatserna från den plana trigonometrin och liknar i viss mån dessa. De ges här utan bevis, men åtföljda av exempel. Bevisen finns för den intresserade i ett Appendix. Det finns ytterligare en mängd formler och regler inom den sfäriska trigonometrin, men målet är här att ge en grundläggande förståelse. Vi nöjer oss därför med de sfäriska sinus- och cosinussatserna.

Sfäriska sinussatsen

I varje sfärisk triangel gäller att

$$\boxed{\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}}$$

Exempel 1: I en sfärisk triangel är $A = 95°,\ B = 38°$ och $a = 37°$. Beräkna sidan b.



Lösning:
Vi kan fastställa att eftersom $A > B$ så är även $a > b$.
Enlig sinussatsen har vi

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin A} \;\Rightarrow\; \sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A} \;\Rightarrow\; b \approx 21,8°$$

Fallet $b \approx 180° - 21,8°$ är inte möjligt, eftersom $B < A \;\Rightarrow\; b < a = 37°$.

Vi har funnit att sidan $b \approx 21,8°$.

Sfäriska cosinussatsen

I varje sfärisk triangel gäller att

$$\boxed{\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C}$$

Specialfall: om vinkeln C är rät, får man

$$\cos c = \cos a \cos b,$$

vilket är den sfäriska motsvarigheten till *Pythagoras sats*.

Eftersom cosinus alltid ger entydigt besked om vinkeln, är sfäriska cosinussatsen att föredra framför sfäriska sinussatsen om det är möjligt.

Anmärkning: Det finns en närbesläktad formel, den s. k. *duala cosinussatsen:*

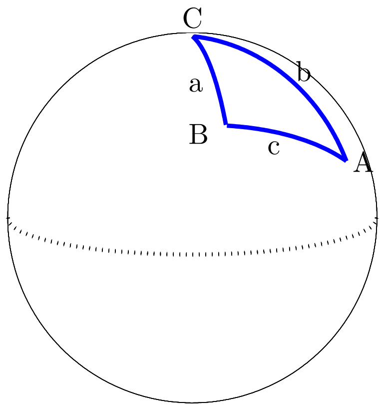
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

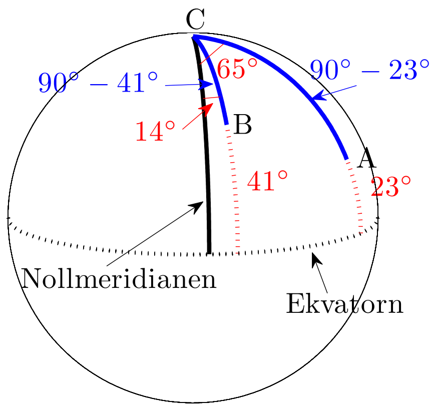
som är intressant, eftersom den visar att man kan beräkna alla sidorna om man vet alla vinklarna, vilket tidigare framhållits som en skillnad gentemot situationen för plana trianglar.

Exempel 2:
(a) Beräkna avståndet längs jordytan mellan en ort A med latitud $N23^\circ$, longitud $E65^\circ$ och en annan ort B med latitud $N41^\circ$, longitud $E14^\circ$.
(b) Beräkna kursen man ska hålla, dels vid avresan från A och dels vid ankomsten till B.

Lösning:
I detta och liknande problem med storcirkelrutter bildar man en användbar sfärisk triangel med hörn i start A och mål B samt i nordpolen C (figuren nedan till vänster). Observera också att longituden för en ort blir lika med hörnvinkeln i nordpolen mellan nollmeridianen och ortens meridian. Därmed blir vinkeln i hörnet C lika med *longituddifferensen* mellan orterna A och B.

(a) Vi ritar upp situationen, dels en figur med den nämnda sfäriska triangeln, dels en figur som belyser hur latitud och longitud ger oss sidor och vinklar i triangeln.





Då känner vi genom latituderna sidorna $AC = b = 90^\circ - 23 = 67^\circ$ och $BC = a = 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$ samt genom longituderna vinkeln $C = 65^\circ - 14^\circ = 51^\circ$ (se högra figuren!). Cosinussatsen ger nu

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C =$$
$$= \cos 49^\circ \cos 67^\circ + \sin 49^\circ \sin 67^\circ \cos 51^\circ$$

vilket ger $c \approx 46,089^\circ = 46,089 \cdot 60' \approx 2765'$, dvs avståndet är 2765 M.

(b) De efterfrågade kurserna blir nu (rita själv figurer!): $360^\circ - A$ respektive $B + 180^\circ$. För att få vinkeln A går det bra att använda sinussatsen, men man får då avgöra om det är det spetsiga eller trubbiga lösningsalternativet till sinusekvationen som ska väljas. Observera också att vi inte har någon bestämd vinkelsumma att utnyttja, och det kan faktiskt finnas mer än en trubbig vinkel i den sfäriska triangeln! Därför tar vi istället cosinussatsen, som ger säkert besked:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \;\Rightarrow\; \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \;\Rightarrow\; A \approx 54,5^\circ$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \;\Rightarrow\; \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} \;\Rightarrow\; B \approx 96,8^\circ$$

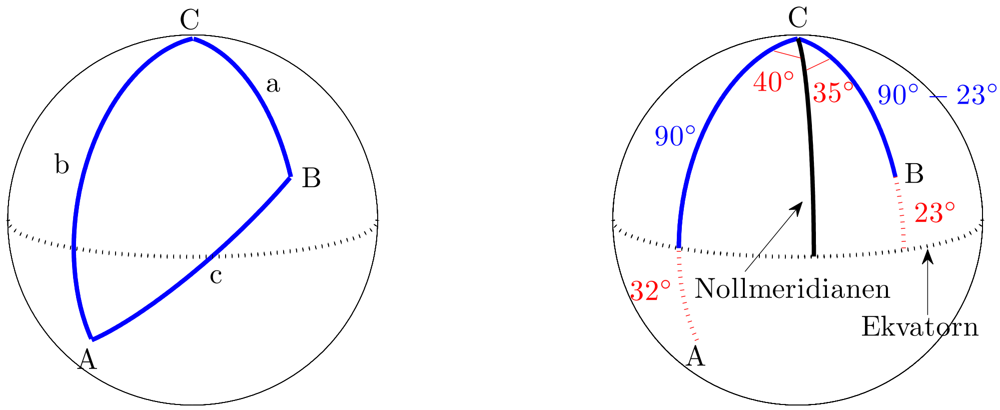
Därmed är kursen vid resans start $360^\circ - A \approx 305,5^\circ$ och vid dess mål $B + 180^\circ \approx 277^\circ$. Vi noterar även att vinkelsumman i triangeln ABC är $\approx 202,3^\circ$.

Svar: Avståndet är 2765 M, de sökta kurserna är $305,5^\circ$ respektive 277°.

Anmärkning: Eftersom $\cos(90^\circ - v) = \sin v$ och $\sin(90^\circ - v) = \cos v$, kan man i cosinussatsen byta ut $\cos a$ och $\cos b$ mot sinus för respektive latitud, och på samma sätt byta ut $\sin a$ och $\sin b$ mot cosinus för respektive latitud. Man slipper då att beräkna a och b, men då får man vara säker på sin sak så att detta inte "smittar av sig" på andra situationer då satsen används.

Exempel 3: Vi ställer nu samma frågor som i föregående exempel då vi startar i en ort A med latitud $S32^\circ$, longitud $W40^\circ$ och anländer till en ort B med latitud $N23^\circ$, longitud $E35^\circ$.

Lösning:
När vi har orter på olika sidor om nollmeridianen eller på olika sidor om ekvatorn får vi se upp med vinklarna. Man kan räkna precis som i förra exemplet om sydliga latituder och västliga longituder räknas negativa. Annars ser vi hur det blir om vi ritar figurer motsvarande dem i exempel 2.



Vi betraktar den sfäriska triangeln med nordpolen C och de två orterna A och B som hörn (figuren till vänster). Då får vi sidorna $BC = a = 90^\circ - 23 = 67^\circ$ och $AC = b = 90^\circ + 32^\circ = 122^\circ$ samt vinkeln $C = 35^\circ + 40^\circ = 75^\circ$ (se högra figuren!). Cosinussatsen ger nu

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C =$$
$$= \cos 67^\circ \cos 122^\circ + \sin 67^\circ \sin 122^\circ \cos 75^\circ$$

vilket ger $c \approx 90,287^\circ = 90,287 \cdot 60' \approx 5417'$, dvs avståndet är 5417 M.

Vi beräknar nu vinklarna A och B för att få kurserna. Den här gången ser vi att (rita igen!) startkursen blir A och målkursen blir $180^\circ - B$.

Cosinussatsen igen:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \;\Rightarrow\; \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \;\Rightarrow\; A \approx 62,8^\circ$$

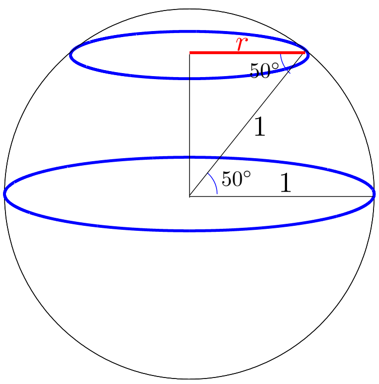
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \;\Rightarrow\; \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} \;\Rightarrow\; B \approx 125,0^\circ$$

Därmed är kursen vid resans start $A \approx 62,8^\circ$ och vid dess mål $180^\circ - B \approx 55,0^\circ$.

Svar: Avståndet är 5417 M, de sökta kurserna är $62,8^\circ$ respektive $55,0^\circ$.

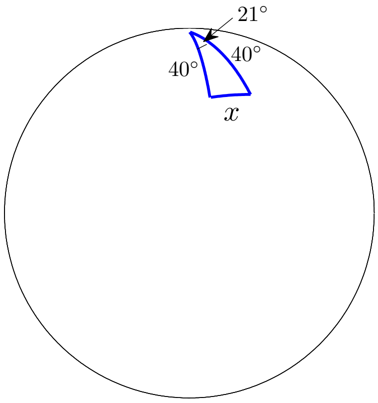
Exempel 4: Två orter befinner sig på samma latitud 50°. Longituddifferensen mellan orterna är 21°.
(a) Hur långt är det mellan orterna längs parallellcirkeln mellan dem?
(b) Hur långt är det mellan orterna längs storcirkeln mellan dem, dvs minsta avståndet längs jordytan?

Lösning:
(a) En minuts longitudsdifferens svarar inte mot samma sträcka på parallellcirkeln med latitid 50° som på ekvatorn. Vi tar reda på förhållandet mellan dessa genom att beräkna radien i parallellcirkeln (ekvatorsradien sätts till 1), se figuren!



Vi ser då att parallellcirkelns radie måste vara $r = \cos 50^\circ$, så detta är den faktor vi måste multiplicera longituddifferensens minuter med för att få nautiska mil. Sträckan mellan orterna längs parallellcirkeln blir alltså $21 \cdot 60 \cos 50^\circ \approx 809,91$ M.

(b) För att få storcirkeldistansen använder vi liksom i exempel 2 och 3 den sfäriska triangeln med orterna och nordpolen som hörn.



Vi får nu med cosinussatsen

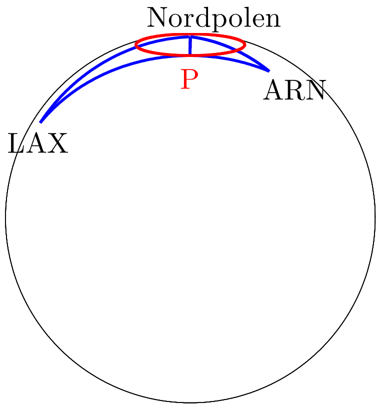
$$\cos x = \cos 40^\circ \cos 40^\circ + \sin 40^\circ \sin 40^\circ \cos 21^\circ \;\Rightarrow\; x \approx 807,24'$$

Svar: (a) 809,9 M, (b) 807,2 M.

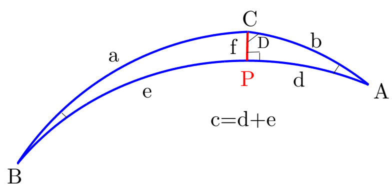
Exempel 5:
Arlanda flygplats (ARN) har latituden N59°39′ och longituden E17°55′, Los Angeles International Airport (LAX) har koordinaterna N33°57′ och longituden W118°24′.
(a) Hur lång är flygrutten mellan orterna längs storcirkeln? Räkna på havsnivån.
(b) Om man startar i Arlanda, vilken kurs ska man flyga ut i?
(c) Var på storcirkelbågen mellan flygplatserna finns den nordligaste punkten? Ange dess koordinater.

Lösning:
Drag storcirkelbågen mellan nordligaste punkten P och nordpolen. Vi får två sfäriska trianglar att arbeta med, och vinklarna vid P är räta, eftersom storcirkeln där tangerar

en parallellcirkel (markerad i figuren).



Vi ser hur stor jorden är, Los Angeles är inte direkt på andra sidan jorden! Vi sätter ARN till A, LAX till B och nordpolen till C och vi gör en lite större figur med själva triangeln:



Med beteckningarna lat_A, long_A respektive lat_B, long_B för orternas koordinater har vi

$$a = 90° - \text{lat}_B,\ b = 90° - \text{lat}_A,\ C = \text{long}_A\text{-long}_B.$$

Vad behöver vi beräkna? För att svara på (a) vill vi veta sidan c, för (b) räcker det med vinkeln A (kursen blir $360° - A$) och för (c) behöver vi sträckan f (ger oss $\text{lat}_P = 90° - f$) och vinkeln D (ger oss $\text{long}_P = \text{long}_A - D$).

Observera att västlig longitud räknas negativ! Gör om minuter till decimalgrader, t ex $59°39' = (59 + 39/60)°$. Här kan man också utnyttja miniräknarens val av vinkelpresentation.

(a) Cosinussatsen ger:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \ \Rightarrow\ c \approx 79,70°$$

Därmed är avståndet $c \cdot 60$ M $= c \cdot 60 \cdot 1,852$ km ≈ 8856 km. Vill man ta hänsyn till flyghöjden h får man addera $\frac{c}{360} 2\pi h$, vilket för $h = 11$km blir ca 15 km.

(b) Cosinussatsen ger oss nu även vinkeln A:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \;\Rightarrow\; \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \;\Rightarrow\; A \approx 35,61^\circ$$

Eftersom AC är meridianen genom ARN, så blir kursen vid start $360^\circ - A \approx 324^\circ$.

(c) Triangeln ACP har rät vinkel vid P. Sinussatsen ger då

$$\frac{\sin f}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin b}{1} \;\Rightarrow\; \sin f = \sin A \sin B \;\Rightarrow\; f \approx 17,11^\circ$$

Cosinussatsen med rät vinkel (dvs Pythagoras sats för sfärisk triangel) ger

$$\cos b = \cos f \cos d \;\Rightarrow\; \cos d = \frac{\cos b}{\cos f} \;\Rightarrow\; d \approx 25,45^\circ$$

och sinussatsen igen:

$$\frac{\sin D}{\sin d} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin b} = \frac{1}{\sin b} \;\Rightarrow\; \sin D = \frac{\sin d}{\sin b} \;\Rightarrow\; f \approx 58,28^\circ$$

Nu har vi $\text{lat}_P = 90^\circ - f \approx 72,89^\circ$ och $\text{long}_P = \text{long}_A - D \approx -40,36^\circ$. Uttryckt i grader och minuter får vi slutligen att orten P har latitud $72^\circ 53'$N och longitud $40^\circ 22'$W. Denna punkt ligger mitt i den grönländska inlandsisen.

Svar:
(a) 8856 km.
(b) 324°.
(c) $72^\circ 53'$N, $40^\circ 22'$W.

Övningar

Alla dessa övningar utom nr 5, 8 och 9 är hämtade från kompendiet Sfärisk trigonometri av Kjell Börjesson, 1986.

1. Lös ut det som efterfrågas i repektive triangel.

   (a) $a = 34,44°$, $A = 61,55°$, $B = 24,46°$. Beräkna b.

   (b) $b = 68,90°$, $c = 56,85°$, $C = 45,23°$. Beräkna B.

   (c) $a = 31,15°$, $b = 84,32°$, $B = 8,45°$. Beräkna A.

   (d) $c = 28,44°$, $A = 138,25°$, $C = 18,57°$. Beräkna a.

   (e) $a = 55,16°$, $c = 73,68°$, $A = 47,40°$. Beräkna C.

2. Lös ut det som efterfrågas i respektive triangel.

   (a) $a = 40,67°$, $b = 118,32°$, $C = 161,38°$. Beräkna c.

   (b) $a = 69,75°$, $c = 54,53°$, $B = 16,48°$. Beräkna b.

   (c) $a = 107,35°$, $b = 76,19°$, $c = 57,83°$. Beräkna A.

   (d) $a = 79,30°$, $b = 100,20°$, $c = 113,27°$. Beräkna B.

   (e) $a = 43,58°$, $b = 44,17°$, $c = 58,38°$. Beräkna C.

   (f) $a = 87,73°$, $c = 126,16°$, $B = 103,48°$. Beräkna b, A, C.

   (g) $a = 41,17°$, $b = 118,93°$, $C = 163,12°$. Beräkna c, A, B.

   (h) $a = 136,82°$, $b = 102,15°$, $c = 60,15°$. Beräkna A, B, C.

   (i) $a = 95,60°$, $b = 116,87°$, $c = 90,00°$. Beräkna A, B, C.

3. I följande trianglar är $C = 90°$. Beräkna återstående sidor och vinklar.

   (a) $a = 39,16°$, $b = 41,25°$.

   (b) $a = 57,21°$, $b = 49,69°$.

   (c) $b = 121,73°$, $c = 93,17°$.

4. Mellan två fartyg som båda befinner sig på latituden S35° är longitudsskillnaden 60°. Fartygen styr mot varandra längs den gemensamma storcirkeln och B:s fart är hälften av A:s. Beräkna den distans fartyg B har tillryggalagt när de möts.

5. Beräkna storcirkelavståndet mellan en ort på ekvatorn med longitud E45° och en ort med latitud 45° och longitud 0°, dvs på Greenwichmeridianen. (Här kan du använda en rätvinklig triangel!)

6. Mellan två orter på latitud 55° är avståndet 1274 M längs parallellcirkeln. Beräkna det kortaste avståndet längs jordytan mellan orterna.

7. (a) Beräkna storcirkeldistans och utseglingskurs från N35°20′, W74°36′ till N49°10′, W5°14′.
   (b) Beräkna latitud och longitud för storcirkelns nordligaste punkt.

8. (a) Man avseglar från orten med koordinaterna N25°, W77° (i Bahamas) med startkursen 45° utmed en storcirkel. Beräkna koordinaterna för den ort man befinner sig i efter att ha tillrygga-lagt 3600 M.
   (b) *Var på denna seglats befinner man sig närmast Grönlands sydspets N60°, W44° och vilket är då avståndet dit?

9. En riktigt lång storcirkelseglats går från Yokohama (N35°, E140°) till Påskön (S27°, W109°). Då man under denna seglats passerar ekvatorn, vilken är kursen och longituden?

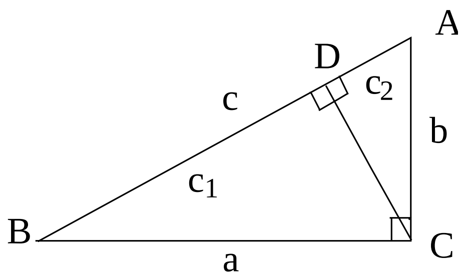
Appendix

De plana triangelsatserna

Pythagoras sats:

I en rätvinklig triangel gäller, med figurens beteckningar:

$$\boxed{\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}}$$



Bevis:
Vi utnyttjar likformigheten mellan trianglarna *ABC*, *BCD* och *ACD*. Av denna får vi, med figurens beteckningar:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{c_1} \quad \text{och} \quad \frac{c}{b} = \frac{b}{c_2}, \quad \text{vilket ger} \quad cc_1 = a^2, \quad cc_2 = b^2$$

Vi adderar de två senaste likheterna ledvis:

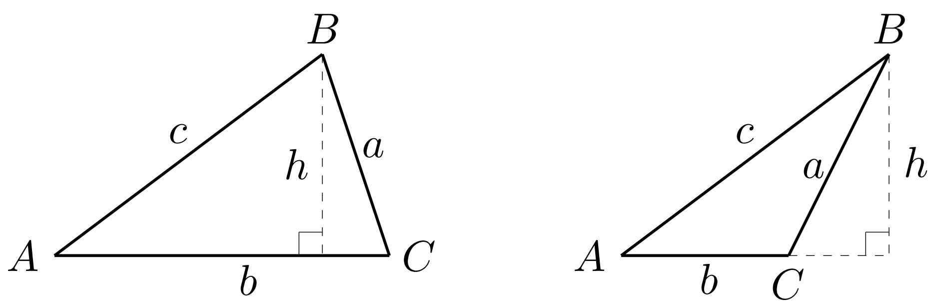
$$cc_1 + cc_2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad c(c_1 + c_2) = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2$$

(i sista steget använde vi att $c_1 + c_2 = c$). $\square$

Areasatsen:

Triangelns area T ges av formeln

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\sin\mathbf{A}$$



Bevis:
I figurerna ser vi att $\sin A = \frac{h}{c}$, oavsett om höjden h ligger invändigt eller utvändigt.
Därur får vi $h = c\,\sin A$. Då är triangelns area $T = \frac{1}{2}b\,h = \frac{1}{2}b\,c\,\sin A$. $\square$

Sinussatsen:

I varje triangel gäller, med gängse beteckningar på sidor och vinklar:

$$\boxed{\frac{\sin \mathbf{A}}{\mathbf{a}} = \frac{\sin \mathbf{B}}{\mathbf{b}} = \frac{\sin \mathbf{C}}{\mathbf{c}}}$$

Bevis:
Areasatsen kan skrivas på tre sätt, alla ger samma resultat:

$$T = \frac{1}{2} b\,c\,\sin A = \frac{1}{2} a\,c\,\sin B = \frac{1}{2} a\,b\,\sin C$$

Om man multiplicerar alla leden med 2 och dividerar dem med *abc*, så får man

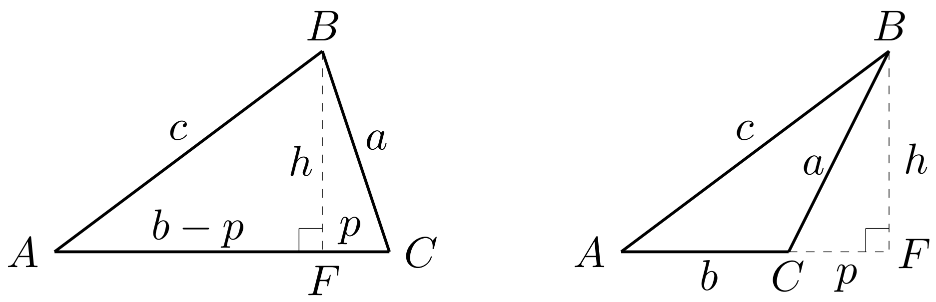
$$\frac{2T}{abc} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

varmed sinussatsen är bevisad! □

Cosinussatsen:

I varje triangel gäller, med gängse beteckningar på sidor och vinklar:

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b}\cos\mathbf{C}$$



Bevis:
Låt b i vanlig ordning stå för sidan AC, och låt p vara sidan CF (med F enligt figurerna). Vi delar in beviset i två fall, beroende på om vinkeln C är spetsig eller trubbig, just så som figurerna visar.

1) I den vänstra triangeln är vinkeln C spetsig, så $\cos C$ är positivt och $p = a\cos C$. Pythagoras sats på de båda rätvinkliga deltrianglarna ger:

$a^2 = h^2 + p^2, \quad c^2 = h^2 + (b-p)^2 = h^2 + b^2 - 2bp + p^2 = \{\text{ur den förra likheten}\}$ $= a^2 + b^2 - 2bp$. Sätter vi in $p = a\cos C$, så får vi cosinussatsens formel.

2) I den högra triangeln är vinkeln C trubbig, alltså är $\cos C$ negativt. Den spetsiga utvändiga vinkeln vid C är $180^\circ - C$, så $p = a\cos(180^\circ - C) = -a\cos C$.

$a^2 = h^2 + p^2, \quad c^2 = h^2 + (b+p)^2 = h^2 + b^2 + 2bp + p^2 = \{\text{ur den förra likheten}\}$ $= a^2 + b^2 + 2bp$. Sätter vi in $p = -a\cos C$, så får vi återigen cosinussatsen. $\square$

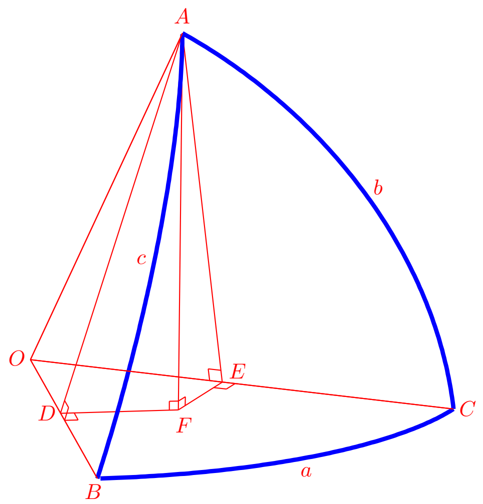
Anm: Här har vi hela tiden en spetsig vinkel A, medan B och C får vara trubbiga. Eftersom det råder symmetri mellan a och b i formeln, kan vi skifta beteckningarna $A,\ B$ och $a,\ b$ och se att beviset går igenom också om A är trubbig! Då är B den spetsiga vinkeln till vänster i figuren.

De sfäriska triangelsatserna

Sfäriska sinussatsen:

I varje sfärisk triangel gäller, med gängse beteckningar på sidor och vinklar:

$$\boxed{\frac{\sin \mathbf{A}}{\sin \mathbf{a}} = \frac{\sin \mathbf{B}}{\sin \mathbf{b}} = \frac{\sin \mathbf{C}}{\sin \mathbf{c}}}$$



Bevis av den sfäriska sinussatsen, i fallet då sidorna är mindre än 90°.
Vår sfäriska triangel är ABC, centrum i sfären heter O. Låt sfären ha radien 1. Dra höjden från A till planet OBC, dess fotpunkt kallar vi F. Dra höjderna från A till radierna OB och OC och kalla deras fotpunkter D respektive E. Därmed har vi fyra rätvinkliga trianglar att arbeta med: ADO, AEO, AFD och AFE. Vi konstaterar först att $\wedge AOD = c$, $\wedge AOE = b$, $\wedge ADF = B$ och $\wedge AEF = C$. Sträckorna AD och AE uttrycks i triangelvinklarna: $AD = \sin c$, $AE = \sin b$. Sträckan AF kan nu uttryckas på två sätt:

$$AF = AD \sin B = AE \sin C \iff \sin c \sin B = \sin b \sin C \iff \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Detta kan göras med vilket par av sidor/vinklar som helst, så vi har därmed fastställt att

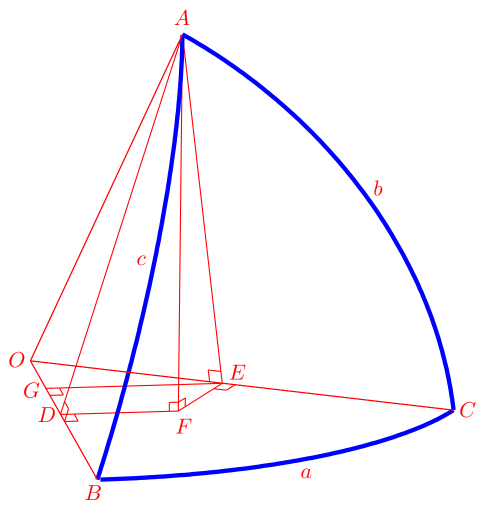
$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

vilket är den sfäriska sinussatsen. □

Sfäriska cosinussatsen:

I varje sfärisk triangel gäller, med gängse beteckningar på sidor och vinklar:

$$\cos \mathbf{c} = \cos \mathbf{a} \cos \mathbf{b} + \sin \mathbf{a} \sin \mathbf{b} \cos \mathbf{C}$$



Bevis av den sfäriska cosinussatsen, i fallet då sidorna är mindre än 90°.
Beteckningarna i figuren är desamma som i föregående figur, men här har tillkommit en sträcka EG, som är höjden från E mot sidan OB. Den sfäriska cossinussatsen kommer här ur det faktum att

$$OD = OG + GD. \tag{6.1}$$

För att se hur satsen följer av detta, konstaterar vi först att
$\wedge EOB = \wedge FEG = a$, $\wedge AOE = b$, $\wedge AOB = c$ och $\wedge AEF = C$.
Vi uttrycker nu sidorna i ekvation (1) med hjälp av dessa vinklar:
$OD = \cos c$, $OG = OE\ \cos a = \cos b \cos a$, $DG = EF\ \sin a = AE\ \cos C \sin a = \sin b \cos C \sin a$. Därmed uttrycker ekvation (1) sambandet

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

och den sfäriska cosinussatsen är bevisad. □

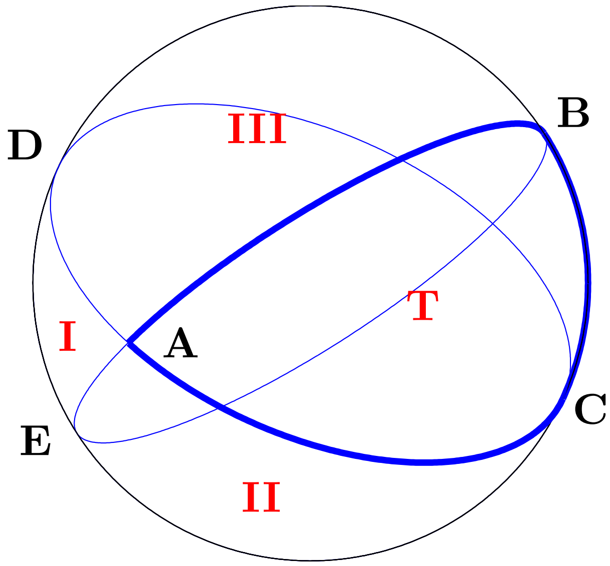
Girards formel

Arean av den sfäriska triangeln är

$$\boxed{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}-\pi}$$

Arean avser den del av enhetssfären som begränsas av triangeln.

Först: två storcirklar avgränsar fyra områden, parvis kongruenta, av sfären. Dessa s.k. *månar* (engelska *lunes*) har arean $2v$ om vinkeln mellan storcirklarna i den aktuella månen är v. Månens andel av hela sfärens area 4π är ju $\frac{v}{2\pi}$.



Bevis: Om vi betecknar arean av den sfäriska triangeln ABC med T, areorna av de sfäriska trianglarna ADE, ACE, ABD med I, II respektive III, så ser vi att de de parvis bildar månar: $T+I=2A$, $T+II=2B$, $T+III=2C$. Detta ger $3T=2(A+B+C)-(I+II+III) \iff 2T=2(A+B+C)-(T+I+II+III)=2(A+B+C)-2\pi$, det sista eftersom de fyra områdena tillsammans utgör en halv sfär. Därmed $T=A+B+C-\pi$. $\square$

FACIT

Kapitel 1. Aritmetik och algebra

1.1.1 (a) $7956 = 21 \cdot 378 + 18$ (b) $7497 = 21 \cdot 357 + 0$ (c) 7497 är delbart med 21

1.1.2 (a) $3^2 \cdot 5 \cdot 11$ (b) $2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$

(a) $-3 \cdot 83$

1.1.3 (a) 319

(b) -564

1.1.4 (a) $a + 2 \cdot a \cdot b$

(b) $2 \cdot a \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot b \cdot b - 2 \cdot a \cdot a - 2 \cdot a \cdot b = 2a^2b + 2ab^2 - 2a^2 - 2ab$

1.1.5 (a) $-2 < 4 < 5 < 11$

(b) $d, b, -a, -c$

1.2.1 (a) $\frac{1}{8}$ (b) $-\frac{281}{28}$ (c) $-\frac{196}{33}$ (d) $\frac{17}{20}$ (e) $\frac{251}{24}$ (f) $\frac{344}{255}$

1.2.2 (a) $\frac{13}{12}$ (b) $-\frac{11}{420}$

1.2.3 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{34}$ (c) $\frac{39}{22}$ (d) 24

(e) $\frac{38}{15}$ (f) $\frac{10}{57}$ (g) $\frac{273}{128}$ (h) $\frac{11011}{1536}$

1.2.4 (a) -2 (b) $\frac{253}{340}$ (c) $-\frac{1349}{1968}$

1.2.5 (a) $c > b > d > a$ (b) $b > a > c > d$

1.3.1 (a) 25 (b) 32 (c) 81 (d) -64

(e) 1 (f) 100 (g) 1 (h) 1

1.3.2 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $-\frac{1}{27}$ (c) 1

1.3.3 (a) 2^{-6} (b) 2^2 (c) 2^{-4}

1.3.4 (a) $-\frac{4}{21}$ (b) -72

1.4.1 (a) Ja.

(b) Ja, det sanna påståendet "2 är mindre än 3" är en av möjligheterna i "2 är mindre än 3 *eller* 2 lika med 3". Alternativt kan man hänvisa till att motsatsen $2 > 3$ är ett falskt påstående.

(c) Nej.

1.4.2
1. $c-a=(c-b)+(b-a)>0$
2. Exemplet
3. $(b+d)-(a+c)=(d-c)+(b-a)>0$
4. $b\cdot c-a\cdot c=(b-a)\cdot c>0$
5. $a\cdot c-b\cdot c=(a-b)\cdot c=-(b-a)\cdot c=(b-a)\cdot -c>0$

1.4.3 T.ex. $3<4$ och $2<6$ men $(3-2)<(4-6)$ gäller inte.

1.4.4 (a) $2,125$ (b) $1,166666\ldots$ (c) $-0,2142857142857\ldots$

1.4.5 (a) $-\dfrac{7}{3}$ (b) $\dfrac{284}{333}$ (c) $\dfrac{31}{25}$

1.5.1 (a) 7 (b) 7 (c) 0

1.5.2 (a) -2 och 0 (b) -4.5 och 10.5 (c) -4 (d) -1 och 4

(e) Inget tal satisfierar ekvationen

1.5.3 (a) $-1\leq x\leq 3$ (b) $-8<x<2$

(c) $x<-8$ eller $x>2$ (d) $x=-2$

(e) $-1\leq x<0$ eller $4<x\leq 5$ (f) $x\neq -1$

1.6.1 (a) 0.7 (b) 300 (c) $15\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2}/5$

(e) $\sqrt{3}$ (f) $10-\sqrt{2}$

1.6.2 (a) ± 5 (b) $\pm\sqrt{5}$ (c) $\pm\frac{2}{3}$ (d) $\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$

(e) 0

1.6.3 (a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{21}}{7}$ (c) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{11}+3$

(e) $-(2+\sqrt{5})$ (f) $3-2\sqrt{2}$

1.7.1 (a) 3 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

(e) 9 (f) $\frac{1}{9}$ (g) 5

1.7.2 (a) $3^{\frac{1}{3}}$ (b) $2^{\frac{1}{2}}$ (c) $-2\cdot 3^{\frac{1}{3}}$ (d) $3^{\frac{1}{12}}$

(e) $2^{\frac{1}{10}}$ (f) $5^{\frac{1}{8}}$ (g) $2^{\frac{2}{3}}$ (h) $2\cdot 3^{\frac{1}{3}}$

1.7.3 (a) $3a$ (b) $x^{\frac{1}{4}}$ (c) $x^{\frac{1}{15}}$ (d) $a^{\frac{1}{2}}$

(e) $a^{\frac{5}{12}}$ (f) $x^{\frac{3}{4}}$

1.8.1 (a) $9t-u-9v$ (b) $2a+12c+73x$

1.8.2 (a) $p+r$ (b) $3b+2c$ (c) $4a-2c$

1.8.3 (a) $20x^2z^8$ (b) $-27a^4b^5c^4$ (c) $14p^3q^9r^4s^2$

1.8.4 (a) $27x^6y^3$ (b) $-128a^8b^7c^6$ (c) $a^{4p}b^{7p}$

1.8.5 (a) $2x^2+3xy-2y^2$ (b) $2x^3+x^2y-5xy^2+2y^3$

(c) a^5+x^5 (d) $-2x^4+x^3+2x^2-13x+6$

1.8.6 (a) $9a^2-24ab+16b^2$ (b) $a^6+4a^3b^2+4b^4$ (c) $2m^8+32$

1.8.7 (a) $36-x^2$ (b) a^4-y^2 (c) $x^{12}-81$

1.8.8 (a) $y^3+9y^2x+27yx^2+27x^3$ (b) $27x^3+54x^2y^2+36xy^4+8y^6$

(c) $x^{12}-18x^9+108x^6-216x^3$

1.8.9 (a) $(x-a^2)(x+a^2)$ (b) $x^2(3x+5)(3x-5)$

(c) $(x+9)^2$ (d) $x^2y(x-2y)^2$

(e) $x(x-1)(x^2+x+1)$ (f) $3(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$

(g) $-x^2(x^2+1)(x+1)(x-1)$ (h) $2x^2y(3y^2-2x)(9y^4+6y^2x+4x^2)$

1.8.10 (a) $x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$
(b) $1-7y+21y^2-35y^3+35y^4-21y^5+7y^6-y^7$
(c) $32x^5+80x^4a^2+80x^3a^4+40x^2a^6+10xa^8+a^{10}$
(d) $x^6y^{12}-18x^5y^{10}z+135x^4y^8z^2-540x^3y^6z^3+1215x^2y^4z^4-1458xy^2z^5+729z^6$

1.8.11 (a) $\dfrac{3a^6}{8c^2}$ (b) $\dfrac{8y}{9x}$ (c) $\dfrac{2a+y}{2a}$ (d) $3xy+5y-2x$

1.8.12 (a) $\dfrac{2}{b-a}$ (b) $\dfrac{x^2(1+2x)}{(1-2x)}$ (c) $-\dfrac{1}{(x-y)^2}$

(d) $\dfrac{b^4+3}{b^4-3}=\dfrac{b^4+3}{(b-\sqrt[4]{3})(b+\sqrt[4]{3})(b^2+\sqrt{3})}$

(e) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a-b}$ (f) $\dfrac{a+1}{a}$ (g) $\dfrac{x^2+4}{x^2+2x+4}$

1.8.13 (a) a^2-ab+b^2 (b) $a^3+a^2b+ab^2+b^3$

(c) Kan inte förkortas (d) $-(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

1.8.14 (a) $x-y^2$ (b) $\dfrac{(x^2+1)(x-1)}{x(x^2-x+1)}$

(c) $\dfrac{x}{y}$ (d) $\dfrac{1}{2}$

1.8.15 (a) $\dfrac{18}{x(x+3)(x-3)}$ (b) $\dfrac{2x^2-7x-2}{2x(x-4)}$

(c) $-\dfrac{1}{x(x+1)(x-1)}$ (d) $\dfrac{8-2x^2-x^3}{4(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)}$

1.8.16 (a) $|c+2|$, gäller för alla reella c

(b) $\dfrac{c}{|c|}=\begin{cases} 1 & \text{om } c>0 \\ -1 & \text{om } c<0 \end{cases}$ gäller för alla reella $c\neq 0$

(c) 1, gäller för $c>0$

(d) $-c\sqrt{9-c}$, gäller för $c<9$

(e) $\dfrac{1}{\sqrt{c-2}}$, gäller för $c>2$

(f) $\dfrac{|c|\sqrt{c+2}}{c}=\begin{cases} \sqrt{c+2} & \text{om } c>0 \\ -\sqrt{c+2} & \text{om } -2\leq c<0 \end{cases}$, gäller för $c\geq -2, c\neq 0$

Kapitel 2. Ekvationer

2.1.1 (a) $x = 7$ (b) $x = -\frac{3}{7}$ (c) Alla tal.

(d) Inga lösningar. (e) $\frac{5}{4}$ (f) $-\frac{4}{3}$

2.1.2 (a) $y = 3x - 7$ (b) $y = \frac{2x-3}{11}$

2.2.1 (a) 1 och -4 (b) -1 och 3 (c) -1 och $\frac{3}{2}$

(d) 0 och $-\frac{3}{7}$ (e) $\frac{3}{2}$

(f) $-\frac{3+\sqrt{29}}{10}$ och $-\frac{3-\sqrt{29}}{10}$ (g) $-\frac{3+\sqrt{29}}{10}$ och $-\frac{3-\sqrt{29}}{10}$

2.2.2 (a) $(x+2)^2 - 3$ (b) $(2x-9)^2 + 19$ (c) $39 - (x+6)^2$

2.2.3 (a) $(x-2)(x+3)$ (b) $-2(x-1)(x+4)$

(c) $(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$ (d) $x^2 + x + 1$

2.2.4 (a) $x^2 + 3x - 10 = 0$ (b) $6x^2 - x - 2 = 0$

(c) $x^2 - 2x - 4 = 0$

2.3.1 (a) 1 och -4 (b) $6 + 3\sqrt{3}$ och $6 - 3\sqrt{3}$

(c) Inga reella lösningar

2.3.2 (a) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ och $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (b) Inga reella lösningar

2.3.3 (a) 9 (b) 2 (c) Ingen rot (d) 2 (e) 4

(f) 12 (g) 3 (h) $\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ (i) 6

2.3.4 (a) 2, -2, $\sqrt{3}$ och $-\sqrt{3}$ (b) 5, -5, 7 och -7 (c) 2 och -2

(d) $\sqrt{6}$ och $-\sqrt{6}$ (e) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ och $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

2.3.5 (a) 9 (b) $19 - 6\sqrt{10}$ (c) 1 och 4

2.4.1 (a) $x = 3{,}5,\ y = 1$ (b) $x = 4,\ y = 1$ (c) $x = -2,\ y = 2$

(d) saknar lösning

(e) oändligt många lösningar, av formen: $x = t,\ y = 3 - 5t$ för alla reella t

(f) $s = 3,\ t = 1$ (g) $x = 2,\ y = 3$ (h) $x = 3,\ y = 5,\ z = 2$

(i) $x = 10,\ y = -0{,}04,\ z = 0{,}06$ (j) $a = -1,\ b = 1,\ c = 2$

(k) $x = 1,\ y = -2,\ z = 3$

2.4.2 Han var 48 år.

2.5.1 (a) $\dfrac{x-1}{x+4}$ (b) $\dfrac{x+2}{x^2+2x-3}$

2.5.2 (a) $\{0, \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\}$ (b) $\{-2, 1, 3\}$

(c) $\{-2, \dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}, \dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}\}$ (d) $\{2\}$

2.5.3 (a) 1 är en trippelrot (b) 1 (enkelrot)

(c) 1 och -1 är trippelrötter

2.5.4 (a) $(x+2)(x-1)(x-3)$ (b) $(x+2)(x+\dfrac{5+\sqrt{21}}{2})(x+\dfrac{5-\sqrt{21}}{2})$

(c) $(x-2)(-3+x-x^2)$

Kapitel 3 Plan trigonometri

1. 18,3 m

2. 14 cm och 18 cm

3. $\sqrt{1450} \approx 38,1$ l.e.

4. 20172

5. (a) $B = 55^\circ,\ a \approx 2,3,\ b \approx 3,3$
   (b) $B = 54^\circ,\ b \approx 4,1,\ c \approx 5,1$
   (c) $b \approx 2,2,\ A \approx 41,8^\circ,\ B \approx 48,2^\circ$
   (d) $c \approx 3,6,\ A \approx 33,7^\circ,\ B \approx 56,3^\circ$
   (e) $A = 35^\circ,\ a \approx 3,5,\ c \approx 6,1$

6. (a) $\cos v = 4/5,\ \tan v = 3/4$
   (b) $\cos v = \sqrt{5}/3,\ \tan v = 2/\sqrt{5}$
   (c) $\sin v = 2\sqrt{2}/3,\ \tan v = 2\sqrt{2}$
   (d) $\sin v = \sqrt{21}/5,\ \tan v = \sqrt{21}/2$
   (e) $\sin v = 1/\sqrt{5},\ \cos v = 2/\sqrt{5}$
   (f) $\sin v = 24/25,\ \cos v = 7/25$
   (g) $\sin v = 10/\sqrt{149},\ \cos v = 7/\sqrt{149}$

7. (a) 47,1° och 132,9°
   (b) Ingen vinkel mellan 0° och 180° har negativt sinusvärde.
   (c) 42,9°
   (d) 137,1°

8. Sida 8,6 cm, vinklar 55° och 45°, area 42 cm^2 (approximativt).

9. 30,7°, 48,2°, 101,1° (approximativt).

10. Sidor 6,4 cm och 8,2 cm. Area 24,6 cm^2 (approximativt).

11. Fall 1: $B_1 \approx 53,0^\circ, \quad C_1 \approx 93,0^\circ, \quad c_1 \approx 12,5$
    Fall 2: $B_2 \approx 127,0^\circ, \quad C_2 \approx 19,0^\circ, \quad c_2 \approx 4,1.$

12. $B \approx 30,6^\circ, \quad C \approx 115,4^\circ, \quad c \approx 17,8$ (bara ett fall denna gång).

13. $10(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$ cm $\approx 7,9$ cm

14. ≈29,8 km (=13,8 km + 16,0 km, addera bådas horisontavstånd!)

15. ≈29,7 m

16. ≈17 m

17. 250 miljoner km eller 43 miljoner km (två möjliga fall - rita!)

18. ≈4,8 cm

19. $A = 1,5, \; \omega = 3$

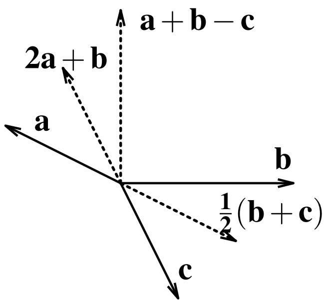
20. $A = 3, \; \omega = 0,5$

21. I vänstra kurvan: $A = 2,5, \; \omega = 0,2$, i högra kurvan: $A = 30, \; \omega = 2,5$ (svaret kan variera något med hur noga man läser av, vilket också gäller i nästa uppgift).

22. I vänstra kurvan: $A = 1, \; \phi = 2$, i högra kurvan: $A = 2, \; \phi = -2$ (eller lika gärna $\phi = -2 + 2\pi \approx 4,3$).

Kapitel 4 Vektorer

1.



2. (a) $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$, (b) $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$, (c) $\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$, (d) $-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$, (e) $-\mathbf{e}_1$

3. (a) Med farten $\sqrt{40}\approx 6,32$ m/s i kursen $108,4^\circ$, (b) $70,5^\circ$
Kurserna i denna uppgift är mätta från nordriktningen medurs (enligt konventionen till sjöss).

4. $(2,2)$

5. $(1,1)$

6. $(1,-1,2)$

7. $(-8,7,-9)$

8. $a=-4$

9. $\mathbf{u}=\pm\frac{1}{3}(-1,2,2)$

10. (a) $\sqrt{14}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) 3

11. (a) $6\sqrt{3}\approx 10,4$N i riktningen $(1,1,1)$, (b) $8,70$N i $28,3^\circ$ med avseende på ö-axeln

12. Alla är vinkelräta.

13. (a) 90°, (b) 45°, (c) $\approx 44.4^\circ$

14. 128°

15. T.ex. (a) $(3,2)$, (b) $(b,-a)$ och (c) $(0,1,2)$

16. Ja, vinkeln vid $(-1,4,2)$ är rät.

17. (a) 8 joule, (b) 0 joule, och (c) -3 joule

18. $-2x+y=3$

19. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-t \end{cases}$; $x+3y=7$

20. $3y-x=1$

21. $(-2,9)$

22. $(2,-1,6)$

23. $(21,2,-17)$

24. (a) Ja. (b) Nej

25. $fs=2.1$knop, $ks=294°$

26. Fart över grund 18 knop, kurs över grund 175°.

27. Farten genom vattnet är 13,5 knop, kursen genom vattnet är kgv=271°.

28. $kg=80°-17.1°=62.9°$, $ks=260°+62.2°=322.2°$
eller (det finns två tolkningar av problemet!)
$kg=80°+17.1°=97.1°$, $ks=260°-62.2°=197.8°$

Kapitel 5 Sfärisk trigonometri

1. (a) $b \approx 15,45^\circ$
   (b) $B \approx 52,29^\circ$ eller $B \approx 127,71^\circ$
   (c) $A \approx 4,38^\circ$
   (d) $a \approx 84,73^\circ$ eller $a \approx 95,27^\circ$
   (e) $C \approx 59,40^\circ$ eller $C \approx 120,60^\circ$

2. (a) $c \approx 154,62^\circ$
   (b) $b \approx 21,01^\circ$
   (c) $A \approx 121,16^\circ$
   (d) $B \approx 96,60^\circ$
   (e) $C \approx 89,44^\circ$
   (f) $b \approx 102,21^\circ,\ A \approx 96,20^\circ,\ C \approx 126,56^\circ$
   (g) $c \approx 156,27^\circ,\ A \approx 28,37^\circ,\ B \approx 39,17^\circ$
   (h) $A \approx 137,43^\circ,\ B \approx 75,11^\circ,\ C \approx 59,03^\circ$
   (i) $A \approx 96,28^\circ,\ B \approx 117,01^\circ,\ C \approx 92,85^\circ$

3. (a) $c \approx 54,34^\circ,\ A \approx 51,01^\circ,\ B \approx 54,24^\circ$
   (b) $c \approx 69,49^\circ,\ A \approx 63,84^\circ,\ B \approx 54,50^\circ$.
   (c) $a \approx 83,96^\circ,\ A \approx 84,86^\circ,\ B \approx 121,59^\circ$.

4. 967 M

5. 3600 M

6. 1259 M

7. (a) 3077 M, 51,7°
   (b) N 50°13′, W 20°46′

8. (a) 50°1′N, 3°37′W (nära Land's End, England).
   (b) 47°19′N, 34°5′W, avståndet är 823 M.

9. Kursen vid ekvatorspassagen är 127°, longituden är W152°.

Printed and Bound at
Department of Mathematical Sciences
Chalmers University of Technology and University of Gothenburg
2014