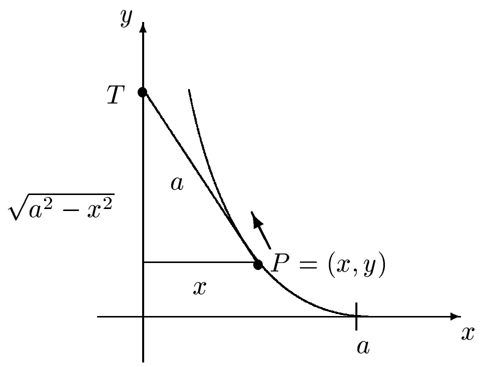
Chalmers Tekniska Högskola **M2Na - ht 98**
Matematik

Konstruktionsövning 4. Begynnelse- o. randvärdesproblem

Uppgift 1. I uppgift 1, konstruktionsövning 2, betraktade vi en släpkurva. Två punkter i xy-planet, P och T, var förbundna med ett snöre som hade längden a. Vi antog att P befann sig i $(a, 0)$ och T i origo.



Då vi förflyttade T längs positiva y-axeln så kom P att följa släpkurvan som gavs av

$$y(x) = a \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2-x^2} \tag{1}$$

Differentialekvationen för denna släpkurva blir (se figuren)

$$y'(x) = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

som är separabel och har en singularitet vid $x = 0$.

Vi skall lösa ekvationen analytiskt med MATHEMATICA, men också numeriskt med MATLAB.

(a). Använd *DSolve* i MATHEMATICA för att lösa problemet analytiskt. Ger programmet samma formel för släpkurvan som i (1)?

(b). Vid den numeriska behandlingen är det lämpligt att använda följande omformulering av ekvationen

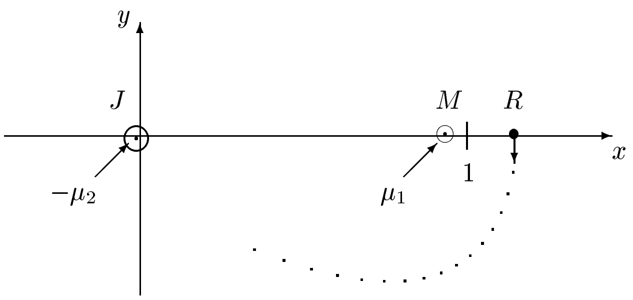
$$\begin{cases} x'(s) = -\frac{x}{a}, & x(0) = a \\ y'(s) = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}, & y(0) = 0 \end{cases}, \quad s > 0$$

där s är båglängden. Med dessa ekvationer undviker vi singulariteten.

Använd nu *ode45* i MATLAB för att lösa problemet med $a = 1$ och rita upp släpkurvan. Jämför resultatet med den exakta formeln för $y(x)$.

Uppgift 2. I den här uppgiften skall vi studera ett system av andra ordningens differentialekvationer som beskriver ett rymdskepp i en omloppsbana runt jorden och månen.

Vi inför ett koordinatsystem med origo i tyngdpunkten i det mass-system som består av jorden och månen (jordens massa är 81.45 gånger så stor som månens massa). Längdenheten är vald så att avståndet från jorden till månen är 1 (= 384400 km), och vi förutsätter att detta avstånd är konstant. Jordens radie är 6368 km och månens radie är 1740 km.



Rymdskeppets position $(x(t), y(t))$ ges av rörelseekvationerna

$$\begin{cases} x'' = x + 2y' - \mu_1(x+\mu_2)r_2^{-3} - \mu_2(x-\mu_1)r_1^{-3} \\ y'' = y - 2x' - \mu_1 y r_2^{-3} - \mu_2 y r_1^{-3} \end{cases}$$

där $r_1 = \sqrt{(x-\mu_1)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x+\mu_2)^2 + y^2}$, $\mu_1 = 1 - \mu_2$ och $\mu_2 = 1/82.45$. Tidsenheten är $3.750820582 \cdot 10^5$ sekunder. De första termerna i differentialekvationens högerled kommer ifrån att koordinatsystemet roterar då månen roterar runt jorden, de övriga termerna uttrycker attraktionskrafterna från jorden resp. månen.

Begynnelsevillkoren

$$x(0) = 1.2,\ x'(0) = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1.04935751$$

ger en lösning som är periodisk med perioden $T = 6.19216933$.

Vad blir det för resultat för

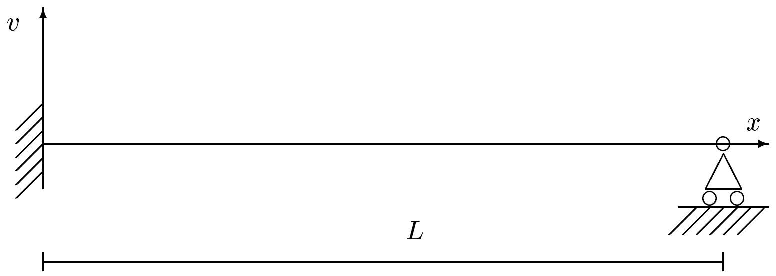
$$y'(0) = -1.00, -1.02 \,\text{respektive}\, -1.30.$$

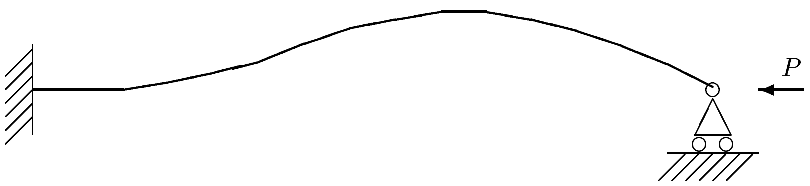
Hur nära kommer rymdskeppet att passera jorden? Avståndet till jorden ges av

$$d = \sqrt{(x+\mu_2)^2 + y^2} - r$$

där r är jordradien (uttryckt i den längdenhet vi använder i koordinatsystemet).

Uppgift 3. Frivillig. Vi vill bestämma utböjningen v hos en stav av längd L, som är fast inspänd i ena ändan och ledlagrad i den andra, då den belastas med lasten P.





I uppgift 1, konstruktionsövning 3, bestämde vi de kritiska lasterna $P_{cr} = x^2\frac{EI}{L^2}$, där x var en positiv rot till ekvationen $\tan(x) - x = 0$. Nu vill vi även bestämma vilken form staven får.

De kritiska lasterna P, utböjningarna v och den vertikala kraften R beskrivs av följande egenvärdesproblem för en ordinär differentialekvation

$$\begin{cases} EI\, v'' + Pv = R(L-x),\ 0 < x < L, \\ v(0) = v'(0) = 0,\ \ v(L) = 0, \end{cases}$$

där EI är böjstyvheten.

Vi diskretisera problemet genom att införa en ekvidistant indelning av intervallet, $x_i = ih$, $i = 0, 1, \cdots, n+1$ med $h = \frac{L}{n+1}$, och använda en centraldifferensapproximation $D_+D_-v(x_i)$ av derivatorna $v''(x_i)$ för $i = 0, 1, \cdots, n$. Låter vi v_i beteckna approximationen av $v(x_i)$ får vi

$$v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} + h^2\frac{P}{EI}v_i = h^2\frac{R}{EI}(L - x_i),\ \ i = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

Från randvillkoren $v(0) = 0$ och $v(L) = 0$ får vi

$$v_0 = 0, \quad v_{n+1} = 0 \tag{3}$$

medan $v'(0) = 0$ måste diskretiseras.

I lärobokens övning 8.9 såg vi att derivatan $v'(x)$ kan approximeras av följande ensidiga differenskvot

$$\frac{-v(x+2h) + 4v(x+h) - 3v(x)}{2h}$$

med andra ordningens noggrannhet. Med denna differensapproximation ersätter vi $v'(0) = 0$ med

$$\frac{-v_2 + 4v_1 - 3v_0}{2h} = 0$$

Eftersom $v_0 = 0$ från (3) så har vi

$$-v_2 + 4v_1 = 0 \tag{4}$$

Ekvationerna (2), (3) och (4) kan med matriser skrivas som ett s.k. generaliserat egenvärdesproblem

$$Au = \lambda Bu$$

där

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & g_1 \\ 1 & -2 & 1 & & & g_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -2 & 1 & g_{n-1} \\ & & & 1 & -2 & g_n \\ 4 & -1 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \\ \hat{R} \end{bmatrix}$$

$g_i = -h^2(L - x_i) = -h^3(n + 1 - i)$, $B = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, 1, 0)$, $\hat{R} = \frac{R}{EI}$ och $\lambda = -h^2\frac{P}{EI}$.

Matrisen B blir singulär. Detta klarar inte glesa egenvärdesfunktionen *eigs* av, utan vi får behandla matriserna som täta och använda *eig*. Lös egenvärdesproblemet och rita upp bucklingsmoderna för de tre lägsta kritiska lasterna. Om ni vill så jämför de kritiska lasterna ni beräknat nu med de ni beräknade i uppgift 1, konstruktionsövning 3.