Lite information om begynnelsevärdesproblem

Introduktion

Man drömmer om att man kan förutspå framtiden. Att förutspå utvecklingar är naturligtvis enklare ju kortare tidsintervall man betraktar. Det var utgångspunkten för Isaac Newton (1642 – 1727) att utveckla en ofattbart god idé. Newton betraktade helt enkelt tidsintervall $[t, t+dt]$ där längden dt är infinitesimal dvs oändligt kort.

Om $y(t)$ betecknar systemets tillstånd vid tidpunkten t då borde enligt Newton tillståndet $y(t+dt)$ vid tidpunkten $t+dt$ satisfiera ekvationen

$$y(t+dt) = y(t) + f(t, y(t))dt$$

dvs ändringen $y(t+dt) - y(t)$ borde vara proportionell till dt.

Man kan nu beräkna $y(t)$ för olika tidpunkter som följande:

$$\begin{aligned}
y(t+dt) &= y(t) + f(t, y(t))dt, \\
y(t+2\,dt) &= y(t+dt) + f(t+dt, y(t+dt))dt, \\
y(t+3\,dt) &= y(t+2\,dt) + f(t+2\,dt, y(t+2\,dt))dt, \\
&\vdots \\
y(t+(n+1)\,dt) &= y(t+n\,dt) + f(t+n\,dt, y(t+n\,dt))dt, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{1}$$

Här finns det tre olika problem:

- Hur kan man hitta en formel för proportionalitetskonstanten $f(t, y(t))$?
- Om man vill använda rekursionsformeln (1) för att beräkna $y(t_1)$ där differensen $t_1 - t$ inte är infinitesimal då måste man göra oändligt många steg.
- Vad menas egentligen med "oändligt kort tidsintervall"?

Lösningen till det första problemet beror på vilket system som betraktas och det finns inte någon handledning för att hitta lösningen. Vi ska dock diskutera några olika exempel.

Det andra problemet var utgångspunkt för Newton att utveckla integrationsteorien. Snart ska vi se sambandet mellan problemet och integration.

Den fullständiga lösningen till det tredje problemet gav K.Weierstraß ungefär 200 år efter Newton. Han introducerade gränsvärden osv. På Weierstraß' språk (som också är det nuvarande språket) ersätts bråket $(y(t+dt)-y(t))/dt$ av derivatan $y'(t)$. Då omskrivs ekvationen (1) som

$$y'(t) = f(t, y(t)). \tag{2}$$

(2) kallas för (explicit) **ordinär differentialekvation** (av första ordningen).

Nu finns det vissa naturliga problem.

- Finns det en lösning till (2)?

Svar: Ja, om funktionen f är kontinuerlig. Det här resultatet kallas för **Peanos existenssats** och ska inte bevisas i den här kursen. Ett bevis finns t ex i boken av Andersson och Böiers.

- Är lösningen entydig?

Normalt är lösningen inte entydig. Det är nästan självklart om man tänker på Newtons rekursionsformel. Man måste naturligtvis kunna $y(t_0)$ för åtminstone en fast tidpunkt t_0. Dvs man behöver ett **begynnelsevillkor**

$$y(t_0) = y_0 \tag{3}$$

för någon tidspunkt t_0 och något **begynnelsevärde** y_0.

(2) och (3) tillsammans kallas för **begynnelsevärdesproblem**.

Peanos existenssatsen garanterar att även begynnelsevärdesproblem har en lösning men den behöver heller inte vara entydig, se exemplet 2 nedan. Vi ska dock bevisa att det finns en entydig lösning om f satisfierar vissa enkla villkor, se **Picard – Lindelöf satser** nedan.

Nu ska vi diskutera problemet att det behövs oängligt många steg för att hitta lösningen med hjälp av Newtons rekursionsformel (1) och om sambandet med integrationsteorien.

Enligt integrationsteoriens huvudsats gäller både (2) och (3) omm

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds. \tag{4}$$

Ekvationen (4) kallas för **integralekvation**.

Vi får se att (4) är mycket lämpligt för att utveckla teorin medan rekursionsformeln (1) är startpunkt för vissa idéer i numerisk analys.

Exempel 1 Låt $m(t)$ vara något radioaktivt ämnes massa vid tidpunkten t. Man vet att $m(t)$ är avtagende (däremot är massan av något motsvarande icke – radioaktivt ämne växande; det ska vi dock inte diskutera). Man vet att m:s minskning är proportionell till massan. Det medför att

$$m(t + dt) - m(t) = \lambda(t)m(t)dt$$

för någon proportionalitetskonstant $\lambda(t)$. Dessutom vet man att "ämnet inte blir äldre" (i motsats till t ex en bil). Det medför att $\lambda(t) = \lambda$ för alla t för någon konstant λ. Så vi får begynnelsevärdesproblemet

$$m'(t) = \lambda m(t), \tag{5}$$

$$m(t_0) = m_0, \tag{6}$$

där t_0 är någon fast tidpunkt och m_0 massan vid tidpunkten t_0. Problemet är naturligtvis ett trivialt specialfall av (2) och (3): sätt $f(t,x) := \lambda x$ för alla t och x i (2) och beteckna y med m.

Lösningen till (5) och (6) är

$$m(t) = m_0 e^{\lambda(t-t_0)}$$

och det finns endast den här lösningen. Om man mäter $m(t)$ vid två olika tidpunkter t_0 och t_1 då kan man bestämma konstanten λ:

$$\lambda = \frac{\ln \frac{m(t_1)}{m(t_0)}}{t_1 - t_0}.$$

När man kan λ kan man beräkna $m(t)$ för godtyckliga tidpunkter t. Det spelar en stor roll när man vill bestämma hur gammalt något är.

I exemplet är konstanten λ mindre än noll. Det medför att

$$|m(t) - \tilde{m}(t)| \leq |m_0 - \tilde{m}_0|, \quad t \geq t_0,$$

där $\tilde{m}(t)$ är den lösningen till den differentiala ekvationen (5) vilken satisfierar begynnelsevillkoret

$$\tilde{m}(t_0) = \tilde{m}_0.$$

Lösningen kallas därför för **stabil** (små ändringar av begynnelsevärdet medför bara små ändringar av värden vid tidpunkter $t \geq t_0$).

Dessutom gäller

$$|m(t) - \tilde{m}(t)| \longrightarrow 0, \quad t \longrightarrow 0.$$

Lösningen kallas därför för **asymptotiskt stabil**.

Vi hade redan anmärkt att även begynnelsevärdesproblem kan ha flera lösningar. Nu ska vi demonstrera det med hjälp av ett enkelt exempel.

Exempel 2 Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$y'(t) = 3y^{2/3}(t), \quad y(0) = 0.$$

Tag godtyckliga reella tal a, b sådana att $a < 0 < b$ och sätt

$$y(t) = \begin{cases} (t-a)^3, & t < a \\ 0, & a \leq t < b \\ (t-b)^3, & b \leq t \end{cases}$$

Funktionen y är en lösning till det sistnämnde begynnelsevärdesproblemet. Problemet har alltså oändligt många lösningar.

Vi ska nu demonstrera två ytterligare viktiga fenomen:

1:a Det kan hända att det finns en entydig lösning till begynnelsevärdesproblemet (2) och (3), men lösningen är inte definierad på hela den reella axeln utan bara på en viss delmängd.

2:a I vissa fall kan lösningar till begynnelsevärdesproblemet (2) och (3) dramatiskt ändras av små ändringar av begynnelsevärdesvillkor.

Exempel 3 Betrakta differentialekvationen

$$y'(t) = -y^2(t)e^t.$$

Om $y(t) \neq 0$ då kan ekvationen skrivas som

$$-\frac{y'(t)}{y^2(t)} = e^t.$$

Eftersom $1/y(t)$ är en primitiv funktion till $-y'(t)/y^2(t)$ ger integration att

$$\frac{1}{y(t)} = e^t + C, \quad \text{dvs} \quad y(t) = \frac{1}{e^t + C},$$

där C är en konstant. Ytterlige en lösning finns, $y(t) = 0$ för alla reella t.

För varje punkt (t_0, y_0) i ty – planet finns det precis en lösning som satisfierar begynnelsevärdesvillkoret (3), nämligen $y(t) = 0$ för alla t i fallet $y_0 = 0$ och lösningen med

$$C := \frac{1}{y_0} - e^{t_0}$$

i det andra fallet.

För $C < 0$ gäller

$$y(t) \longrightarrow -\infty, \quad t \uparrow \ln(-C), \quad \text{och}$$

$$y(t) \longrightarrow +\infty, \quad t \downarrow \ln(-C).$$

Lösningen är alltså bl a inte definierad vid punkten $\ln(-C)$ och går mot $\pm\infty$ kring den här punkten.

Å andra sidan är lösningen definierad på hela den reella axeln om $C \geq 0$ och även begränsad om $C > 0$.

Existens och entydighet; Picard – Lindelöf

Vi har redan sett att ett begynnelsevärdesproblem kan ha flera lösningar, se exemplet 2 ovan. Vi ska dock bevisa att även det flerdimensionella begynnelsevärdesproblemet

$$\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \quad \text{och} \quad \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), \quad t \in I, \tag{7}$$

har en entydig lösning om funktionen $\underline{f}$ och intervallet I uppfyller vissa villkor som är satisfierada i nästan alla tillämpingar.

P. g. a. integrationsteorins huvudsats är (7) ekvivalent med

$$\underline{y}(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(s, \underline{y}(s))ds, \quad t \in I. \tag{8}$$

(8) kan omskrivas som en fixpunkt ekvation: Sätt

$$T\underline{g}(t) := \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(s, \underline{g}(s))ds, \quad t \in I, \tag{9}$$

för varje kontinuerlig funktion $\underline{g} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Då är (8) ekvivalent med

$$\underline{y} = T\underline{y}. \tag{10}$$

För att kunna använda den här ekvivalensen behöver vi lite notation och en fixpunktsats.

Låt $-\infty < a < b < \infty$ och låt $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ vara mängden av alla kontinuerliga funktioner $\underline{g} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Vi sätt

$$\| \underline{g} \| := \max_{t \in [a,b]} \| \underline{g}(t) \|$$

för alla $\underline{g} \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$.

En avbildning $T : C([a,b], \mathbb{R}^n) \longrightarrow C([a,b], \mathbb{R}^n)$ kallas för kontraktion om

$$\exists c < 1 \, \forall \underline{g}, \underline{h} \in C([a,b], \mathbb{R}^n) : \| T\underline{g} - T\underline{h} \| \leq c \, \| \underline{g} - \underline{h} \| .$$

För enkelhetens skull har vi skrivit och ska vi skriva "$T\underline{g}$" istället av "$T(\underline{g})$".

Hjälpsats 4 *(en följdsats till Banachs fixpunktsatsen)*
Låt $T : C([a,b],\mathbb{R}^n) \longrightarrow C([a,b],\mathbb{R}^n)$ *vara en avbildning. Antag att det finns* $c < 1$ *sådan att*

$$\| T\underline{g} - T\underline{h} \| \leq c \, \| \underline{g} - \underline{h} \|$$

för alla $\underline{g}, \underline{h} \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$. *Då har* T *exakt en fixpunkt* $\underline{y}$, *dvs det finns exakt en funktion* $\underline{y} \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ *sådan att*

$$T\underline{y} = \underline{y}.$$

Dessutom gäller för alla $\underline{g} \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ *att*

$$\| T^n\underline{g} - \underline{y} \| \leq c^n \, \| \underline{g} - \underline{y} \| .$$

Vi ska nu bevisa existens och entydighet av lösningen $\underline{y}$ till ett begynnelsevärdesproblem i ett specialfall. Beviset ger även en metod att beräkna approximativa lösningar: Tag en godtycklig kontinuerlig funktion $\underline{g} : [t_0, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Då gäller

$$\| T^n\underline{g} - \underline{y} \| \leq c^n \, \| \underline{g} - \underline{y} \|, \quad n \in \mathbb{N},$$

där $c = L \cdot |\beta - t_0|$, se nedan. För varje startpunkt $\underline{g}$ konvergerar alltså följden $(T^n\underline{g})$ alldeles fort mot lösningen $\underline{y}$.

Hjälpsats 5 *(Picard – Lindelöf, enklaste fall)*
Låt $\underline{f} : [t_0, \beta] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *vara kontinuerlig. Antag att det finns* L *sådan att*

$$L \cdot |\beta - t_0| < 1$$

och

$$\| \underline{f}(t,\underline{x}) - \underline{f}(t,\underline{y}) \| \leq L \, \| \underline{x} - \underline{y} \|$$

för alla $t_0 \leq t \leq \beta$ *och alla* $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$. *Då har för alla begynnelsevektorer* $\underline{y}_0$ *begynnelsevärdesproblemet*

$$\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \quad \text{och} \quad \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), \quad t_0 \leq t \leq \beta,$$

exakt en lösning $\underline{y} : [t_0, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Bevis: Vi definierar avbildningen

$$T : C([t_0,\beta],\mathbb{R}^n) \longrightarrow C([t_0,\beta],\mathbb{R}^n)$$

genom (9) där $I = [t_0, \beta]$. P. g. a. ekvivalensen (7) $\Leftrightarrow$ (10) och hjälpsatsen 4 behöver vi bara bevisa att T är en kontraktion.

Låt $\underline{g}, \underline{h} \in C([t_0, \beta], \mathbb{R}^n)$. Låt $t_0 \leq t \leq \beta$.

$$\begin{aligned}
\| T\underline{g}(t) - T\underline{h}(t) \| &= \| \int_{t_0}^{t} (\underline{f}(s, \underline{g}(s)) - \underline{f}(s, \underline{h}(s)))ds \| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \| \underline{f}(s, \underline{g}(s)) - \underline{f}(s, \underline{h}(s)) \| \, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L \; \| \underline{g}(s) - \underline{h}(s) \| \; ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L \; \| \underline{g} - \underline{h} \| \; ds \\
&= L \, |t - t_0| \; \| \underline{g} - \underline{h} \| \, .
\end{aligned}$$

Det medför att

$$\| T\underline{g} - T\underline{h} \| \leq |\beta - t_0| \cdot L \cdot \| \underline{g} - \underline{h} \|$$

och hjälpsatsen är bevisad. $\square$

Lipschitzkonstanten L behöver inte vara t – oberoende som i hjälpsatsen 5. Det räcker att L är “lokalt t – oberoende”, se den följande sats.

Sats 6 *(Picard – Lindelöf, Lipschitzkonstanten $\underline{x}$ – oberoende)*
Låt $-\infty < t_0 < b \leq \infty$. Låt $\underline{f} : [t_0, b) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vara kontinuerlig. Antag att för varje $t_0 < \beta < b$ existerar en konstant $L_\beta < \infty$ sådan att för alla $t_0 \leq t \leq \beta$ och alla $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\| \underline{f}(t, \underline{x}) - \underline{f}(t, \underline{y}) \| \leq L_\beta \; \| \underline{x} - \underline{y} \| \, .$$

Då har för varje $\underline{y}_0$ begynnelsevärdesproblemet

$$\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \quad \textit{och} \quad \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), \quad t_0 \leq t < b,$$

exakt en lösning $\underline{y} : [t_0, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Bevis: P.g.a. hjälpsatsen 5 och ekvivalensen (7) $\Leftrightarrow$ (8) finns en β sådan att $t_0 < \beta < b$ och integralekvationen

$$\underline{y}(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(s, \underline{y}(s))ds, \quad t_0 \leq t \leq \beta,$$

har exakt en lösning $\underline{y}_\beta : [t_0, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Låt E vara mängden av alla sådana β och B supremet över E.

Antag att $B < b$. Tag först en godtycklig $B < \gamma < b$ och sedan $B < \beta_2 \leq \gamma$ sådan att $L_\gamma \cdot |\beta_2 - B| < 1$. Efter det tag $\beta_1 \in E$ sådan att även $L_\gamma \cdot |\beta_2 - \beta_1| < 1$. Hypotesen i hjälpsatsen 5 är satisfierad om vi ersätter t_0 med β_1, β med β_2, L med L_γ och $\underline{y}_0$ med $\underline{y}_{\beta_1}(\beta_1)$. P.g.a. hjälpsatsen 5 och ekvivalensen (7) $\Leftrightarrow$ (8) har integralekvationen

$$\underline{y}(t) = \underline{y}_{\beta_1}(\beta_1) + \int_{\beta_1}^t \underline{f}(s, \underline{y}(s))ds, \quad \beta_1 \leq t \leq \beta_2,$$

exakt en lösning $\underline{y}_2 : [\beta_1, \beta_2] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Funktionen $\underline{y} : [t_0, \beta_2] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ som liknar $\underline{y}_{\beta_1}$ på intervallet $[t_0, \beta_1]$ och $\underline{y}_2$ på $[\beta_1, \beta_2]$ är då den entydiga lösningen till integralekvationen

$$\underline{y}(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^t \underline{f}(s, \underline{y}(s))ds, \quad t_0 \leq t \leq \beta_2.$$

Det motsvarar B:s definition ty $\beta_2 > B$. Det gäller alltså $B = b$.

Varje lösning $\underline{y} : [t_0, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ till integralekvationen

$$\underline{y}(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^t \underline{f}(s, \underline{y}(s))ds, \quad t_0 \leq t < b, \tag{11}$$

måste satisfierar

$$\underline{y} \equiv \underline{y}_\beta \quad \text{på} \quad [t_0, \beta], \quad \beta \in E, \tag{12}$$

ty entydigheten. Det finns alltså endast en lösning till (11).

För alla $\beta, \gamma \in E$, $\beta < \gamma$, gäller $\underline{y}_\beta \equiv \underline{y}_\gamma$ på $[t_0, \beta]$ ty entydigheten. Därför kan en funktion $\underline{y} : [t_0, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definieras genom (12) och den satisfierar ekvationen (11). (11) har alltså exakt en lösning $\underline{y} : [t_0, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ och p.g.a. ekvivalensen (7) $\Leftrightarrow$ (8) är satsen bevisad. $\square$

Lipschitzkonstanten L behöver heller inte vara $\underline{x}$ – oberoende. Det räcker att L "är lokalt $\underline{x}$ – oberoende", se satsen 10 nedan. Ett exempel, där inte finns någon $\underline{x}$ – oberoende L men åtminstone en "lokalt $\underline{x}$ – oberoende L", är exemplet 3 ovan. Exemplet 3 visar att i ett sådant fall kan lösningarna gå mot ∞ vid en punkt t i intervallets inre. Observera att det inte kan ske om det starkare villkoret i satsen 6 är satisfierat.

Om L "bara är konstant i en liten omgivning av $\underline{x}$" då är man intresserad av frågan "hur länge lösningen $\underline{y}$ stannar i en liten omgivning av begynnelsevektorn $\underline{y}_0$". Det följande delsvaret till frågan visar att det finns en $\varepsilon > 0$ sådan att varje lösning stannar åtminstone $\varepsilon > 0$ länge i omgivningen. Lipschitzvillkoret behövs inte här.

Hjälpsats 7 *Låt $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ vara öppen, $\underline{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vara kontinuerlig, $\delta, \varepsilon > 0$ och*

$$R := \{(t, \underline{x}) : t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon, \parallel \underline{x} - \underline{y}_0 \parallel \leq \delta\} \subset \Omega.$$

Sätt

$$M := \sup_{(t,\underline{x}) \in R} \parallel \underline{f}(t, \underline{x}) \parallel .$$

Antag att $\varepsilon \cdot M \leq \delta$. Då gäller

$$\parallel \underline{y}(t) - \underline{y}_0 \parallel \leq \delta, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon,$$

för varje funktion $\underline{y} : [t_0, t_0 + \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ som satisfierar

$$\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \quad \text{och} \quad \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon.$$

Bevis: Antag att det finns $t_0 < t \leq \beta := t_0 + \varepsilon$ sådan att

$$\parallel \underline{y}(t) - \underline{y}_0 \parallel > \delta.$$

Då finns $t_0 < \tau < t$ sådan att

$$\parallel \underline{y}(\tau) - \underline{y}(t_0) \parallel = \delta \quad \text{och} \quad \parallel \underline{y}(s) - \underline{y}(t_0) \parallel < \delta, \quad t_0 < s < \tau,$$

eftersom funktionen $\parallel \underline{y}(\cdot) - \underline{y}_0 \parallel$ är kontinuerlig. Det gäller

$$\begin{aligned} \delta = \parallel \underline{y}(\tau) - \underline{y}(t_0) \parallel &= \parallel \int_{t_0}^{\tau} \underline{y}'(s) ds \parallel \\ &= \parallel \int_{t_0}^{\tau} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds \parallel \\ &\leq \int_{t_0}^{\tau} \parallel \underline{f}(\underbrace{(s, \underline{y}(s))}_{\in R}) \parallel ds \\ &\leq \int_{t_0}^{\tau} M ds = |\tau - t_0| M. \end{aligned} \tag{13}$$

Om $M = 0$ då får vi motsägelset att $0 < \delta \leq 0$. Om $M > 0$ då medför (13) att $\delta \leq |\tau - t_0| \cdot M < \varepsilon \cdot M \leq \delta$. Antagandet är alltså fel och hjälpsatsen är bevisad. $\square$

Om Lipschitzvillkoret bara är "lokalt $\underline{x}$ – oberoende" då behöver vi "en lokal version av hjälpsatsen 4". Vi sätt $\bar{B}(\underline{x}, r) := \{\underline{y} \in \mathbb{R}^n : \| \underline{x} - \underline{y} \| \leq r\}$ och betecknar med $C([a,b], \bar{B}(\underline{x}, r))$ mängden av alla kontinuerliga funktioner $\underline{g} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sådana att $\| \underline{g}(t) - \underline{x} \| \leq r$ för alla $a \leq t \leq b$.

Hjälpsats 8 *(en följdsats till Banachs fixpunktsatsen)*
Låt $T : C([a,b], \bar{B}(\underline{x}, r)) \longrightarrow C([a,b], \bar{B}(\underline{x}, r))$ vara en avbildning. Antag att det finns $c < 1$ sådan att för alla $\underline{g}, \underline{h} \in C([a,b], \bar{B}(\underline{x}, r))$

$$\| T\underline{g} - T\underline{h} \| \leq c \| \underline{g} - \underline{h} \| .$$

Då finns exakt en $\underline{y} \in C([a,b], \bar{B}(\underline{x}, r))$ sådan att $\underline{y} = T\underline{y}$. Dessutom gäller

$$\| T^n \underline{g} - \underline{y} \| \leq c^n \| \underline{g} - \underline{y} \|, \quad n \in \mathbb{N},$$

för varje $\underline{g} \in C([a,b], \bar{B}(\underline{x}, r))$.

P.s.s. som i beviset till hjälpsatsen 5 kan vi nu bevisa att begynnelsevärdesproblemet (7) åtminstone "lokalt har en entydig lösning" om "lokalt ett Lipschitzvillkoret är satisfierat":

Följdsats 9 *(Picard – Lindelöf, den lokala versionen)*
Låt Ω vara en öppen delmängd av $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ och $\underline{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vara kontinuerlig. Antag att det finns en $L < \infty$ sådan att för alla $(t, \underline{x}), (t, \underline{y}) \in \Omega$

$$\| \underline{f}(t, \underline{x}) - \underline{f}(t, \underline{y}) \| \leq L \cdot \| \underline{x} - \underline{y} \| .$$

Då finns för varje $(t_0, \underline{y}_0) \in \Omega$ en $\beta > t_0$ sådan att begynnelsevärdesproblemet

$$\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \text{och} \quad \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), \quad t_0 \leq t \leq \beta, \tag{14}$$

har exakt en lösning på intervallet $[t_0, \beta]$.

Bevis: Rektangeln

$$R := \{(t,\underline{x}) : t_0 \le t \le \beta, \| \underline{x} - \underline{y}_0 \| \le \delta\}$$

ligger i Ω om $\beta - t_0 > 0$ och $\delta > 0$ är tillräckligt små. Genom att minska β om nodvändig gör vi att även

$$|\beta - t_0| \cdot L < 1 \quad \text{och} \quad |\beta - t_0| \cdot M \le \delta$$

där $M := \max_{(t,\underline{x})\in R} \| \underline{f}(t,\underline{x}) \|$.

Låt

$$T\underline{g}(t) := \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}(s,\underline{g}(s))ds, \quad t_0 \le t \le \beta,$$

för varje $\underline{g} \in C([t_0,\beta], \bar{B}(\underline{y}_0,\delta))$. P.g.a. av hjälpsatsen 7 ligger varje lösning till (14) i mängden $C([t_0,\beta], \bar{B}(\underline{y}_0,\delta))$. P.g.a. ekvivalensen (7) $\Leftrightarrow$ (8) behöver vi bara bevisa att T har exakt en fixpunkt. Det kan vi bevisa p.s.s. i beviset till hjälpsatsen 5; använd bara hjälpsatsen 8 istället av hjälpsatsen 4. $\square$

Om man utvidgar lösningen så länge som möjligt då förblir den naturligtvis entydig:

Sats 10 *(Picard – Lindelöf, "den maximala lösningen")*
Låt $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ vara öppen och $\underline{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ kontinuerlig. Antag att för varje punkt $(t_0,\underline{y}_0) \in \Omega$ finns en öppen omgivning Ω_0 av $(t_0,\underline{y}_0)$ och en konstant $L_0 < \infty$ sådana att

$$\| \underline{f}(t,\underline{x}) - \underline{f}(t,\underline{y}) \| \le L_0 \ \| \underline{x} - \underline{y} \|$$

för alla $(t,\underline{x}),(t,\underline{y}) \in \Omega_0$.

Låt $(t_0,\underline{y}_0) \in \Omega$. Då finns $b > t_0$ med följande egenskaper:

- *Begynnelsevärdesproblemet*

  $$\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \quad \text{och} \quad \underline{y}'(t) = \underline{f}(t,\underline{y}(t)), \quad t_0 \le t < b,$$

  har exakt en lösning $\underline{y} : [t_0,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

- *För alla $c > b$ gäller: Begynnelsevärdesproblemet*

  $$\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \quad \text{och} \quad \underline{y}'(t) = \underline{f}(t,\underline{y}(t)), \quad t_0 \le t < c,$$

  har inte lösning ("b är maximal").

Bevis: P.g.a. fjöldsatsen 9 finns $\beta > t_0$ sådan att problemet

$$\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \quad \text{och} \quad \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), \quad t_0 \leq t \leq \beta,$$

har exakt en lösning $\underline{y} : [t_0, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Låt b vara supremet över alla sådana $\beta > t_0$. P.s.s. som i beviset till satsen 6 kan vi bevisa att problemet

$$\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \quad \text{och} \quad \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), \quad t_0 \leq t < b,$$

har exakt en lösning $\underline{y} : [t_0, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Antag att det finns en lösning $\underline{z}$ som även är definierad på något större intervall $[t_0, c)$, $c > b$. Då gäller $\underline{z} \equiv \underline{y}$ på intervallet $[t_0, b)$ p.g.a. entydigheten.

P.g.a. fjöldsatsen 9 finns en $\beta > b$ sådan att problemet

$$\underline{x}(b) = \underline{z}(b) \quad \text{och} \quad \underline{x}'(t) = \underline{f}(t, \underline{x}(t)), \quad b \leq t \leq \beta,$$

har exakt en lösning. Eftersom $\underline{z}$ är en lösning till det här problemet är $\underline{z}$ även entydig bestämt på intervallet $[b, \beta]$. Det finns alltså $\beta > b$ sådan att problemet

$$\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \quad \text{och} \quad \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), \quad t_0 \leq t \leq \beta,$$

har exakt en lösning $\underline{y} : [t_0, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Det motsvarar b:s definition och antagandet är fel. $\square$

Den följande satsen ger viktig information om den maximala lösningen. Satsen betyder att lösningskurvan $\{(t, \underline{y}(t)) : t_0 \leq t < b\}$ konvergerar mot punkten ∞ i Ω:s enpunktkompaktefisering. Se uppgiften 2 för en demonstration av de olika möjligheterna som finns.

Sats 11 *Antag att hypotesen i satsen 10 är satisfierad och låt* $\underline{y} : [t_0, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *vara lösningen som beskrivs i detta sats. Låt* K *vara en kompakt delmängd av* Ω*. Då finns en* t_K *sådan att* $t_0 < t_K < b$ *och* $\underline{y}(t) \notin K$ *för alla* $t_K < t < b$.

Bevis: Antag att för varje $t_0 < t < b$ finns en $t < \tilde{t} < b$ sådan att $\underline{y}(\tilde{t}) \in K$. Eftersom K är kompakt och p.g.a. Bolzano – Weiserstraß satsen medför det att det finns en följd (t_n) i (t_0, b) som konvergerar mot b och någon punkt $\omega \in K$ sådan att

$$(t_n, \underline{y}(t_n)) \longrightarrow \omega, \quad n \longrightarrow \infty. \tag{15}$$

Uppenbart finns $\underline{y}_b \in \mathbb{R}^n$ sådan att

$$\omega = (b, \underline{y}_b). \tag{16}$$

Sätt

$$\underline{y}(b) := \underline{y}_b.$$

Vi ska bevisa att den utvidgade funktionen $\underline{y} : [t_0, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fortfarende är kontinuerlig.

Låt

$$R := \{(t, \underline{x}) : b - \varepsilon \leq t \leq b, \parallel \underline{x} - \underline{y}(b) \parallel \leq 2 \cdot \delta\}.$$

För tillräckligt små $\varepsilon, \delta > 0$ ligger rektangeln R i Ω. Genom att minska $\varepsilon > 0$ om nodvändig får vi att

$$\varepsilon \cdot \max_{(t,\underline{x}) \in R} \parallel \underline{f}(t, \underline{x}) \parallel \leq \delta.$$

P.g.a. (15) och (16) finns $b - \varepsilon < s < b$ sådan att

$$\parallel \underline{y}(s) - \underline{y}(b) \parallel < \delta.$$

P.g.a. hjälpsatsen 7 gäller

$$\parallel \underline{y}(s) - \underline{y}(t) \parallel \leq \delta, \quad s < t < b.$$

(Ersätt t_0 med s och $t_0 + \varepsilon$ med t i hjälpsatsen 7). Det medför att

$$\parallel \underline{y}(t) - \underline{y}(b) \parallel \leq 2\delta, \quad s \leq t \leq b,$$

och $\underline{y}$ är kontinuerlig vid b också.

P.g.a. ekvivalensen (7) $\Leftrightarrow$ (8) och eftersom $\underline{y}$ och primitiva funktioner till kontinuerliga funktioner är kontinuerliga satisfierar $\underline{y} : [t_0, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ integralekvationen (8) på hela intervallet $I = [t_0, b]$. P.g.a. samma ekvivalens och Picard – Lindelöfs satsen 10 finns $\beta > b$ sådan att integralekvationen

$$\underline{x}(t) = \underline{y}(b) + \int_b^t \underline{f}(s, \underline{x}(s)) ds, \quad b \leq t \leq \beta,$$

har en lösning $\underline{x}$. Funktionen som liknar $\underline{y}$ på intervallet $[t_0, b]$ och $\underline{x}$ på intervallet $[b, \beta]$ är då en lösning till integralekvationen (8) på hela intervallet $[t_0, \beta]$. Eftersom $\beta > b$ och p.g.a. ekvivalensen (7) $\Leftrightarrow$ (8) motsvarar det b:s maximalitet. Antagandet i början av beviset är alltså fel och satsen bevisad.
$\square$