Ytterligare uppgifter till ODE - kursen 2001

1. Bestäm samtliga lösningar till följande ekvationer, och skissera några typiska lösningskurvor i ty – planet.

a) $y' = 2ty^2$.

b) $y' = t^2y^2 - 4t^2$.

2. Låt $-\infty \leq C \leq K \leq \infty$. Det finns en kontinuerlig funktion $f : [-1, 0) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ och en lösning $y : [-1, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ till differentialekvationen

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad -1 \leq t < 0,$$

sådana att

$$|f(t, x) - f(t, y)| = 0, \quad -1 \leq t < 0,\ x, y \in \mathbb{R},$$

och

$$\liminf_{t \longrightarrow 0} y(t) = C, \quad \limsup_{t \longrightarrow 0} y(t) = K.$$

3.a) För alla $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ har begynnelsevärdesproblemet

$$y'(t) = 2ty(t), \quad y(t_0) = y_0,$$

exakt en lösning som torde kunna "beräknas direkt" och som naturligtvis också kan beräknas med hjälp av separata variabler metoden.

b) Låt

$$Tg(t) := 1 + \int_0^t 2sg(s)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

för alla kontinuerliga funktioner $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Låt

$$T^1 := T \quad \text{och} \quad T^{n+1}g := TT^n g, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Låt nu $g(t) = 1$ för alla $t \in \mathbb{R}$. Följden $(T^n g)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergerar mot lösningen till begynnelsvärdesproblemet

$$y'(t) = 2ty(t), \quad y(0) = 1.$$

4. Betrakta pendelekvationen

$$y''(t) + \sin(y(t)) = 0.$$

a) För alla $(t_0, y_0, y_0^{(1)}) \in \mathbb{R}^3$ finns exakt en lösning $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ till pendelekvationen vilken satisfierar begynnelsevillkoret

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0^{(1)}. \tag{1}$$

b) Låt y vara lösningen till pendelekvationen vilken satisfierar begynnelsevillkoret (1), där $0 < y_0 < \pi$, $y_0^{(1)} = 0$. Det finns en T, $0 < T < \infty$, sådan att

$$y(T/4) = 0 \quad \text{och} \quad y(t) > 0, \quad 0 < t < T/4.$$

5. Låt y vara som i uppgiften 4. b).

a) Låt

$$x(t) := -y(T/4 + t), \quad z(t) := y(T/4 - t).$$

Bevisa att även x och z är lösningar till pendelekvationen och satisfierar samma begynnelsevillkoret vid tidpunkten 0, dvs $x(0) = z(0)$ och $x'(0) = z'(0)$. Varför medför det att $x = z$ på hela den reella axeln? Observera också att $y(T/2) = -y_0$ och $y'(T/2) = 0$.

b) Låt

$$x(t) := y(T/2 + t), \quad z(t) := y(T/2 - t).$$

Bevisa att $x = z$ på hela den reella axeln, $y(T) = y_0$ och $y'(T) = 0$. Dessutom bevisa att y är T – periodisk dvs

$$y(t + T) = y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

6. Låt

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$\underline{y}'(t) = A\,\underline{y}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Bestäm lösningen som satisfierar begynnelsevillkoret

$$\underline{y}(0) = (1 \quad 1 \quad 1)^T.$$

Anmärkning: När man har gjort uppgiften 7 kan man praktiskt tagit entydighetsbeviset till Picard – Lindelöfs sats.

7. Låt A vara en reell $n \times n$ – matris, $t_0 \in \mathbb{R}$ och $\underline{y}$ och $\underline{z}$ lösningar till begynnelsevärdesproblemet

$$\underline{y}'(t) = A \cdot \underline{y}(t), \quad \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0.$$

a) Det gäller

$$\underline{y}(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} A \cdot \underline{y}(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

och

$$\underline{z}(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} A \cdot \underline{z}(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Låt $\overline{st} := \{\lambda s + (1-\lambda)t : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ vara strecken mellan punkterna s och t.

$$\| \underline{y}(t) - \underline{z}(t) \| \leq |t - t_0| \, \| A \| \sup_{s \in \overline{t_0 t}} \| \underline{y}(s) - \underline{z}(s) \|$$

för alla $t \in \mathbb{R}$. Det medför att

$$\underline{y}(t) = \underline{z}(t), \quad \text{om} \quad |t - t_0| \, \| A \| < 1.$$

c) Det gäller även $\underline{y}(t) = \underline{z}(t)$ på hela den reella axeln.

8. Låt

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}_0 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationssystemet

$$\underline{y}'(t) = A \cdot \underline{y}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\underline{y}'(t) = A \cdot \underline{y}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \underline{y}(0) = \underline{y}_0.$$

c) Bestäm den allmänna lösningen till

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

och lösningen som satisfierar $\underline{y}(0) = (2\,2\,2)^t$.

9. Låt J vara en $n \times n$ – matris, U en inverterbar $n \times n$ – matris och

$$A = U^{-1} J U.$$

Låt $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_n$ vara n linjärt oberoende lösningar till differentialekvationssystemet

$$\underline{z}'(t) = J\underline{z}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Då är kolonnerna av matrisen

$$U^{-1}(\underline{z}_1\, \underline{z}_2\, \ldots\, \underline{z}_n)U$$

linjärt oberoende lösningar till

$$\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t).$$

10. Låt $\underline{g} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vara en kontinuerlig funktion sådan att för varje $t_0 \in \mathbb{R}$ and varje $\underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ begynnelsevärdesproblemet

$$\underline{y}'(t) = \underline{g}(\underline{y}(t)), \quad \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0,$$

har exakt en lösning. (T ex, det är sant om funktionen $\underline{g}$ är Lipschitzkontinuerlig). Låt $\underline{y}$ vara en lösning till $\underline{y}'(t) = \underline{g}(\underline{y}(t))$.

a) Låt $T > 0$. Det gäller följande implikation:

$$\exists t_1 \in \mathbb{R} : \underline{y}(t_1) = \underline{y}(t_1 + T) \Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : \underline{y}(t) = \underline{y}(t + T).$$

b) Låt t_n, $n \in \mathbb{N}$, and t_∞ vara reella tal sådana att $t_n \neq t_\infty$ för alla $n \in \mathbb{N}$ och följden $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerar mot t_∞. Om

$$\underline{y}(t_\infty) = \underline{y}(t_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

då är lösningen $\underline{y}$ konstant.