Inlämningsuppgift 1 för Analytiska funktioner E3, 2000: Ett potentialproblem

Funktionen $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ har många intressanta avbildningsegenskaper. Låt $z = re^{i\theta}$, $w = u + iv = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{1}{2}(re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta})$. Då är

$$u = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\theta,$$
$$v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\theta.$$

Välj $r > 1$ fixt. Då avbildas cirkeln $|z| = r$ på ellipsen

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

där $a = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$, $b = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})$. Ellipsens brännpunkter är $\pm c$, där $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$ oberoende av r. Då r avtar mot 1, krymper ellipsen mot intervallet $[-1, 1]$ på realaxeln. Då r växer från 1 mot ∞, sveper cirklarna $|z| = r$ över området $|z| > 1$. Ellipsernas halvaxlar a och b växer också mot ∞, och ellipserna sveper över området utanför intervallet $-1 \leq u \leq 1$, $v = 0$. Funktionen $f(z)$ ger alltså en ett-ett-avbildning mellan området $|z| > 1$ och området utanför $-1 \leq u \leq 1$, $v = 0$ (ett uppskuret w-plan). Detta kommer också att visas nedan på ett litet striktare sätt. Eftersom z och $\frac{1}{z}$ avbildas på samma punkt, så har vi också en ett-ett-avbildning mellan $|z| < 1$ och det uppskurna w-planet. Vi ser också t.ex. att området $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ avbildas på $\operatorname{Im} w > 0$. Funktionen kan alltså användas för att beskriva strömning runt ett hinder (se övning 8.6:8 i boken).

Uppgift a. Om man avbildar cirklar som ligger "nära" enhetscirkeln kan man få intressanta bilder. Studera bilden av cirkeln $z = c + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, där c kan vara t.ex. 0.1, $0.1 + 0.1i$, $0.1 + 0.2i$, och $r = |c + 1|$ eller $r = |c + 1| + 0.05$. Sådana avbildningar har använts för att studera strömning kring en flygplansvinge (funktionen $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ kallas ofta Joukowski-funktionen efter en rysk aerodynamiker). Skriv ut och lämna in några representativa bilder.

Vi såg ovan att $f(z)$ är en ett-ett-avbildning mellan vissa områden. Vi vill beräkna inversen och löser därför ekvationen $2w = z + \frac{1}{z}$, $z^2 - 2wz + 1 = 0$ med den formella lösningen

$$z = w \pm \sqrt{w^2 - 1}.$$

Frågan är dock vilken gren av $\sqrt{w^2 - 1}$ som skall väljas. Det kan man komma fram till på olika sätt. Ett sätt (som också ger ett bevis för den ovan beskrivna avbildningsegenskapen) är följande. Inför variablerna $z_1 = \frac{z-1}{z+1}$ och $w_1 = \frac{w-1}{w+1}$. Då motsvarar området $|z| > 1$ det högra halvplanet $\operatorname{Re} z_1 > 0$, och området utanför $-1 \leq u \leq 1$, $v = 0$ motsvarar w_1-planet uppskuret utefter negativa realaxeln (kontrollera!). Sambandet $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ övergår i $w_1 = z_1^2$. Det är då klart att $z_1 = w_1^{1/2}$, där $w_1^{1/2}$ betecknar principalgrenen. Vi får

$$z = \frac{1 + w_1^{1/2}}{1 - w_1^{1/2}} = \frac{(1 + w_1^{1/2})}{1 - w_1} = \frac{1 + w_1 + 2w_1^{1/2}}{1 - w_1}$$
$$= \frac{1 + \frac{w-1}{w+1} + 2\left(\frac{w-1}{w+1}\right)^{1/2}}{1 - \frac{w-1}{w+1}} = w + (w+1)\left(\frac{w-1}{w+1}\right)^{1/2}.$$

Den sista termen, som är analytisk utanför $-1 \leq u \leq 1$, $v = 0$, har kvadraten $w^2 - 1$, och är alltså en gren av $(w^2-1)^{1/2}$. Det är den gren som också kan införas som (se boken)

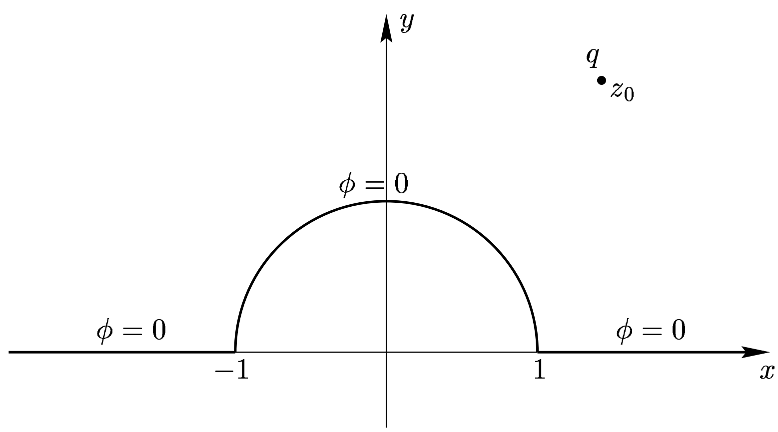
$$(w^2-1)^{1/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}},$$

där $w - 1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $w + 1 = r_2 e^{i\theta_2}$ för $0 < \theta_1 < 2\pi$, $0 < \theta_2 < 2\pi$, och också för $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Så vi har alltså

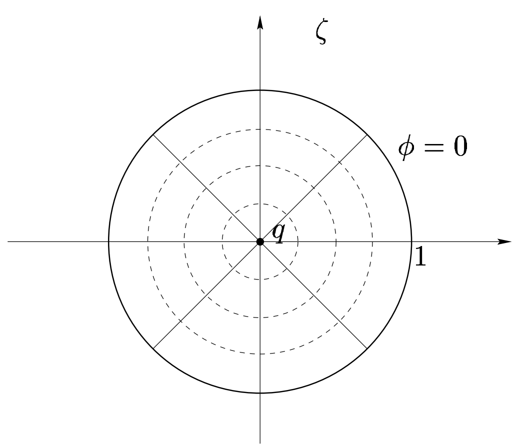
$$z = f^{-1}(w) = w + (w^2-1)^{1/2}$$

med den ovan beskrivna grenen av $(w^2-1)^{1/2}$.

Vi skall studera fältbilden från en punktladdning (egentligen linjeladdning) q i punkten z_0 i området $\operatorname{Im} z > 0$, $|z| > 1$, då randen (bestående av halvcirkeln $|z| = 1$, $y > 0$ och den del av realaxeln där $|x| \geq 1$) har potentialen noll. Detta kan vara en modell för ett åskmoln ovanför en slätt med en ås.



Med avbildningen $w = f(z)$ fås motsvarande problem i halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$. En Möbiusavbildning $\zeta = g(w)$ avbildar sedan $\operatorname{Im} w > 0$ på $|\zeta| < 1$ med punktladdningen i origo (se t.ex. Beta). Den komplexa potentialen i ζ-planet är $\Phi = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \log \zeta$. Fältlinjerna strålar ut radiellt, medan ekvipotentiallinjerna är koncentriska cirklar.



Uppgift b. Låt A och B vara de två sista siffrorna i ditt personnummer, och låt z_0 vara punkten $z_0 = \frac{A+1}{5} + i(2 + \frac{B}{10})$. Rita i z-planet fältlinjer och ekvipotentiallinjer motsvarande linjerna i ζ-planet (undvik radien med $\arg \zeta = 0$ (om $g(w)$ har valts så att $g(\infty) = 1$)). Det enklaste är kanske att explicit beskriva var och en av kurvorna i figuren och sedan låta MATLAB räkna ut $w = g^{-1}(\zeta)$, $z = f^{-1}(w)$. Använd kommandot `hold on` för att kunna rita flera kurvor i samma figur. Använd med fördel uttrycket $(w+1)\left(\frac{w-1}{w+1}\right)^{1/2}$ för beräkning av $(w^2-1)^{1/2}$, eftersom MATLAB:s kommando `sqrt` just beräknar principalvärden. Var på randen (”marken”) är fältstyrkan störst? Ledning: Fältstyrkan är $|\mathbf{E}| = |\nabla\phi| = \left|\frac{d\Phi}{dz}\right|$, där Φ är den komplexa potentialen ovan. Räkna ut $\frac{d\Phi}{dz}$ för hand och låt sedan MATLAB beräkna absolutbelopp. Rita $|\mathbf{E}|$ på ”åsen” $z = e^{i\theta}$ som funktion av θ, $0 \le \theta \le \pi$, och på ”slätten” $z = x$, då x ligger mellan 1 och 3 (t.ex.). Sätt $\frac{q}{2\pi\varepsilon} = 1$.