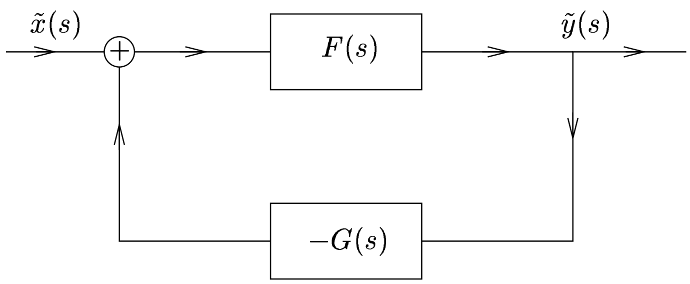
Inlämningsuppgift 2 för Analytiska funktioner E3, 2000: Stabilitet hos filter

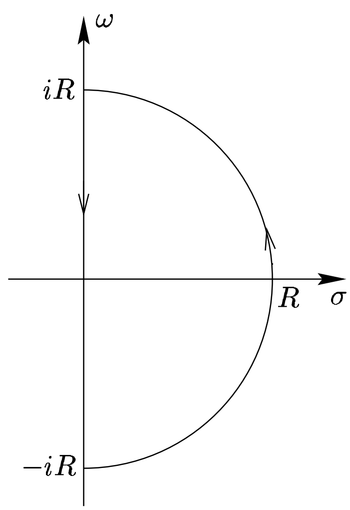
Ett återkopplat system enligt figur har totala överföringsfunktionen $H(s) = \frac{F(s)}{F(s)G(s)+1}$.



Antag att

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 5}, \quad G(s) = \frac{k(s^2 - 3)}{s^3 + 5.3s^2 + As + B + 1},$$

där A och B är de två sista siffrorna i ditt personnummer. Uppgiften är att bestämma för vilka reella värden på k ($k \neq 0$) som det återkopplade systemet är stabilt. Detta är fallet då $F(s)G(s) + 1$ saknar nollställen i högra halvplanet och på imaginäraxeln. Man kan använda argumentprincipen på funktionen $F(s)G(s) + 1$ och en stor halvcirkel i högra halvplanet enligt



figur. Eftersom bilden av halvcirkelbågen $|s| = R$, $\operatorname{Re} s \geq 0$, krymper mot en punkt då $R \to \infty$, räcker det att studera bilden av imaginäraxeln, som blir en sluten kurva. Kurvan $z = F(i\omega)G(i\omega)$ då ω växer från $-\infty$ till ∞ kallas i reglertekniken för *Nyquistdiagrammet*. Observera att orienteringen av imaginäraxeln för Nyquistdiagrammet är motsatt den som har använts i figuren ovan. Skriv ekvationen $F(s)G(s) + 1 = 0$ på formen $H_0(s) + \frac{1}{k} = 0$, där

$$H_0(s) = \frac{s(s^2 - 3)}{(s^2 + 3s + 5)(s^3 + 5.3s^2 + As + B + 1)}.$$

Antalet nollställen i högra halvplanet hänger alltså ihop med hur många varv som Nyquistdiagrammet till $H_0(s) + \frac{1}{k}$ går runt origo, dvs. hur många varv som Nyquistdiagrammet till $H_0(s)$ går runt punkten $-\frac{1}{k}$. (Tänk igenom detta ordentligt, så att du förstår hur många varv det handlar om vid stabilitet. Man behöver veta hur många poler som $H_0(s) + \frac{1}{k}$ har i högra halvplanet. Dessa, som ges av nollställena till $(s^2 + 3s + 5)(s^3 + 5.3s^2 + As + B + 1)$ beräknas lätt m.h.a. MATLAB.)

Uppgift a. Rita (med MATLAB) Nyquistdiagrammet för $H_0(s)$ och markera genomloppsriktningen (svarande mot växande ω enligt ovan). Avläs härur för vilka k-värden som systemet är stabilt.

För ett kausalt, diskret filter med rationell överföringsfunktion $H(z)$ gäller att filtret är stabilt om och endast om $H(z)$ saknar poler i området $|z| \geq 1$.

Uppgift b. Antag att $H(z)$ har nämnaren $Q(z) = z^4 + az^3 + k(z^2 + 1.3z - 0.3)$, där $a = \frac{A+1}{10}$ (A som ovan). Undersök för vilka reella värden på k som filtret är stabilt (dvs. Q:s samtliga nollställen ligger i $|z| < 1$). Skriv ekvationen $Q(z) = 0$ på formen

$$\frac{z^4 + az^3}{z^2 + 1.3z - 0.3} + k = 0$$

och använd argumentprincipen på $|z| \leq 1$. Rita som förut en viss kurva och avläs för vilka k-värden som filtret är stabilt.