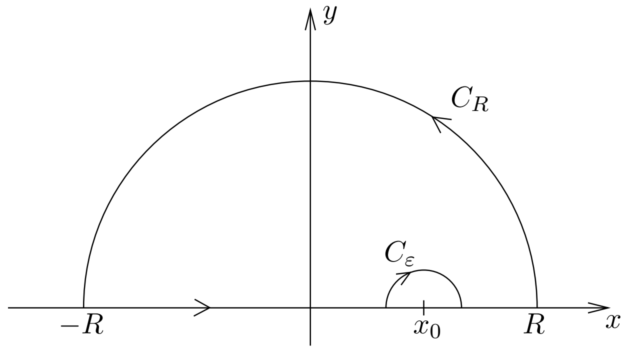
Hilberttransform, Laplacetransform, kausala filter, m.m.

Kjell Holmåker

10 oktober 2002

1. Hilberttransformen och kausala filter

Antag att $f(z)$ är analytisk för $\operatorname{Im} z \geq 0$ och att $f(z) \to 0$ då $z \to \infty$ i $\operatorname{Im} z \geq 0$. Låt x_0 vara reellt och integrera $\frac{f(z)}{z-x_0}$ runt konturen i figuren.



Integralen $\oint \frac{f(z)}{z-x_0} dz$ runt hela konturen är 0. Det gäller att

$$\left| \int_{C_R} \frac{f(z)}{z-x_0}\, dz \right| \leq \frac{\max_{z\in C_R} |f(z)|}{R-|x_0|} \pi R \to 0 \quad \text{då } R \to \infty,$$

och

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-x_0}\, dz \to -\pi i \operatorname*{Res}_{z=x_0} \frac{f(z)}{z-x_0} = -\pi i f(x_0) \quad \text{då } \varepsilon \to 0.$$

Alltså är

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx \overset{\text{(def)}}{=} \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{-R}^{x_0-\varepsilon} + \int_{x_0+\varepsilon}^{R} \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx = \pi i f(x_0).$$

Med andra ord är

$$f(x) = -\frac{1}{\pi i} \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t}\, dt,$$

för alla reella x. Efter separation i real- och imaginärdelar fås, om $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$,

$$u(x,0) = -\frac{1}{\pi} \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t,0)}{x-t}\, dt, \qquad v(x,0) = \frac{1}{\pi} \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t,0)}{x-t}\, dt.$$

Integralerna som uppträder här är Hilberttransformer. Närmare bestämt har vi följande definition:

Definition. Integralen (då den existerar)

$$v(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{x-t}\,dt \tag{1}$$

kallas *Hilberttransformen* av $u(t)$. Vi skriver $v = \mathcal{H}u$, $v(x) = \mathcal{H}[u(\cdot)](x)$, e.d.

För funktionen $f(z)$ ovan har vi alltså följande samband mellan real- och imaginärdelarna på realaxeln:

$$v(\cdot,0) = \mathcal{H}[u(\cdot,0)], \qquad u(\cdot,0) = -\mathcal{H}[v(\cdot,0)].$$

Allmänt kan man visa att om $u(t)$ är en en reellvärd funktion som är tillräckligt regulär, så kan man definiera en funktion

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{t-z}\,dt, \qquad \operatorname{Im} z > 0.$$

Då är $f(z)$ analytisk för $\operatorname{Im} z > 0$, och om vi definierar

$$f(x) = \lim_{y\to 0^+} f(x+iy), \qquad x \text{ reell},$$

så blir $\operatorname{Re} f(x) = u(x)$ och $\operatorname{Im} f(x) = (\mathcal{H}u)(x)$. Om $u(t)$ representerar en signal, så kallas $f(t)$ för ***den analytiska signalen*** associerad med $u(t)$:

$$f(t) = u(t) + i(\mathcal{H}u)(t).$$

Eftersom integralen i (1) är faltningen mellan funktionerna $u(t)$ och $1/t$, så är $\mathcal{H}u = u * \frac{1}{\pi t}$. Med användning av teorin för Fouriertransformer av generaliserade funktioner (distributioner) får man då $\widehat{\mathcal{H}u} = \hat{u}\cdot(-i\operatorname{sgn}\omega)$. Alltså är $\hat{f}(\omega) = 0$ då $\omega < 0$, och $\hat{f}(\omega) = 2\hat{u}(\omega)$ då $\omega > 0$.

Exempel. Tag $u(t) = \cos\omega_0 t$, $\omega_0 > 0$. För $\operatorname{Im} z > 0$ fås med hjälp av Jordans lemma i övre resp. undre halvplanet

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega_0 t}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_0 t}}{t-z}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega_0 t}}{t-z}\,dt\right] \\ &= \operatorname*{Res}_{\zeta=z} \frac{e^{i\omega_0\zeta}}{\zeta-z} + 0 = e^{i\omega_0 z}, \end{aligned}$$

så att den analytiska signalen blir $f(t) = e^{i\omega_0 t}$. Alternativt kan vi beräkna Hilberttransformen:

$$\begin{aligned} v(t) = (\mathcal{H}u)(t) &= \frac{1}{\pi}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega_0\tau}{t-\tau}\,d\tau = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\ \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_0\tau}}{\tau-t}\,d\tau = \\ &= -\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left[\pi i \operatorname*{Res}_{\zeta=t} \frac{e^{i\omega_0\zeta}}{\zeta-t}\right] = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}(\pi i e^{i\omega_0 t}) = \sin\omega_0 t. \end{aligned}$$

Beräkningen kan också ske med hjälp av generaliserad Fouriertransform:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\omega) &= \pi\left[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right], \\ \hat{v}(\omega) &= -i\operatorname{sgn}\omega\cdot\pi\left[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right] = -i\pi\left[-\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right] \\ &= \mathcal{F}\left[\sin\omega_0 t\right], \\ v(t) &= \sin\omega_0 t. \end{aligned}$$

Användande av den analytiska signalen $f(t)$ i stället för den fysikaliska signalen $u(t)$ kan alltså ses som en generalisering av $j\omega$-metoden.

Exempel. Betrakta den amplitudmodulerade signalen $u(t) = (1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t$, där $\Omega < \omega_0$, $|m| < 1$. Vi kan skriva

$$u(t) = \cos\omega_0 t + \frac{m}{2}\left[\cos(\omega_0 - \Omega)t + \cos(\omega_0 + \Omega)t\right].$$

Enligt föregående exempel är den analytiska signalen

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{i\omega_0 t} + \frac{m}{2}\left[e^{i(\omega_0-\Omega)t} + e^{i(\omega_0+\Omega)t}\right] = e^{i\omega_0 t}\left[1 + \frac{m}{2}(e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t})\right] = \\ &= (1 + m\cos\Omega t)e^{i\omega_0 t}. \end{aligned}$$

2. Laplacetransformer

För en funktion $f(t)$ sådan att $e^{-pt}|f(t)|$ är integrerbar över intervallet $(0,\infty)$ för någon reell konstant p definieras Laplacetransformen

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Här är $s = \sigma + i\omega$ en komplex variabel, och integralen konvergerar för $\operatorname{Re} s = \sigma \geq p$. För dessa s är

$$|F(s)| \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-pt}e^{-(\sigma-p)t}dt.$$

För varje $\varepsilon > 0$ kan vi välja ett $t_0 > 0$ så att $\int_0^{t_0}|f(t)|e^{-pt}dt < \varepsilon$. För $\sigma > p$ är

$$|F(s)| \leq \int_0^{t_0}|f(t)|e^{-pt}dt + e^{-(\sigma-p)t_0}\int_{t_0}^\infty |f(t)|e^{-pt}dt \leq \varepsilon + e^{-(\sigma-p)t_0}\int_0^\infty |f(t)|e^{-pt}dt,$$

och detta kan göras mindre än 2ε om σ väljs tillräckligt stort. Alltså gäller att $F(s) \to 0$ då $\operatorname{Re} s \to \infty$. Vidare är $F(s)$ är analytisk i halvplanet $\operatorname{Re} s > p$. För att visa det använder vi satser från flervariabelteorin som säger att det är tillåtet att derivera m.a.p. σ och ω under integraltecknet och att de resulterande partiella derivatorna är kontinuerliga. De uppfyller då Cauchy-Riemanns ekvationer, ty

$$\left(\frac{\partial}{\partial\sigma} + i\frac{\partial}{\partial\omega}\right)F(s) = \int_0^\infty f(t)\left(\frac{\partial}{\partial\sigma} + i\frac{\partial}{\partial\omega}\right)e^{-st}dt = 0,$$

eftersom e^{-st} är analytisk i s (för fixt t) och satisfierar Cauchy-Riemanns ekvationer $\frac{\partial}{\partial\sigma}e^{-st} = -i\frac{\partial}{\partial\omega}e^{-st}$. Alltså är $F(s)$ analytisk. För derivatan gäller att

$$F'(s) = \frac{\partial}{\partial\sigma}F(s) = \int_0^\infty f(t)\frac{\partial}{\partial\sigma}e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)(-t)e^{-st}dt.$$

Allmänt fås

$$F^{(n)}(s) = \int_0^\infty f(t)(-t)^n e^{-st}dt.$$

Ofta kan $F(s)$ fortsättas analytiskt utanför halvplanet $\operatorname{Re} s > p$. I så fall låter vi Laplacetransformen vara den analytiskt fortsatta funktionen. Så t.ex. konvergerar $\int_0^\infty e^t \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s-1}$ enbart för $\operatorname{Re} s > 1$, men vi säger att Laplacetransformen av funktionen e^t är den analytiska funktionen $\frac{1}{s-1}$ definierad i hela s-planet utom $s = 1$ med en enkelpol i $s = 1$.

Ofta kan $f(t)$ återvinnas ur sin Laplacetransform $F(s)$. Man kan använda sig av resultat från Fourieranalysen som i följande inversionssats.

Sats 1. *Antag att $f(t)$ (utöver ovanstående allmänna förutsättning) är styckvis kontinuerlig och har en styckvis kontinuerlig derivata. Då är för varje $a \geq p$*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{a-iR}^{a+iR} F(s) e^{st} ds. \tag{2}$$

Detta gäller för alla $t > 0$, om $f(t)$ i diskontinuitetspunkter har definierats så att $f(t) = \frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)]$.

Bevis. Vi använder Fouriers inversionssats på funktionen $g(t) = \theta(t) f(t) e^{-at}$ (där $\theta(t)$ är Heavisides stegfunktion, ibland även betecknad $H(t)$ eller $u(t)$). Dess Fouriertransform är

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-at} e^{-i\omega t} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(a+i\omega)t} dt = F(a + i\omega),$$

och vi har (med $s = a + i\omega$)

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} F(a + i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \\ e^{at} g(t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{a-iR}^{a+iR} F(s) e^{st} ds. \end{aligned}$$

För $t > 0$ är $e^{at} g(t) = f(t)$, och påståendet följer. Vi ser också att integralen i (2) blir 0 för $t < 0$. □

Ofta är situationen den motsatta mot ovan: vi har en funktion $F(s)$ given, och vi vill ta reda på om den är Laplacetransformen av någon funktion $f(t)$. Förhoppningen är att $f(t)$ skall kunna erhållas med hjälp av inversionsintegralen i (2), men det är tyvär inte alltid sant; det kan nämligen hända att inversionsintegralen konvergerar mot en funktion, som inte har $F(s)$ som sin Laplacetransform. Med lämpliga förutsättningar på $F(s)$ kan man dock få det önskade resultatet. Vi ger två exempel på sådana situationer.

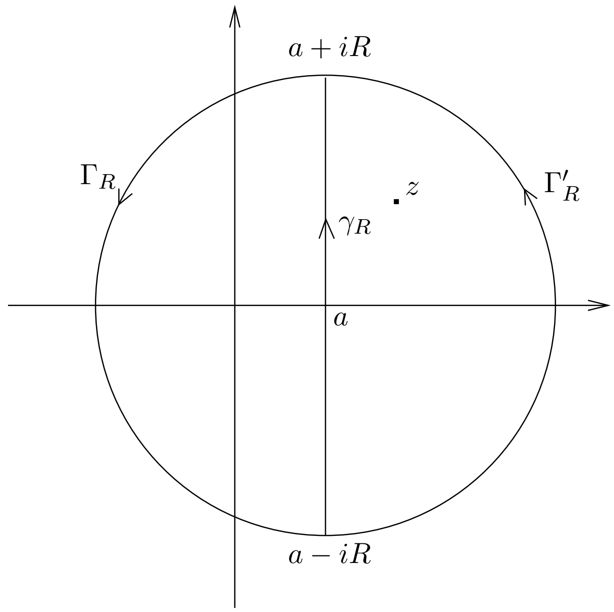
Sats 2. *Antag att $g(s)$ är analytisk i hela s-planet utom i ändligt många punkter s_k, och att $g(s) \to 0$ då $s \to \infty$. Då är $g(s)$ Laplacetransformen av*

$$f(t) = \sum_k \operatorname*{Res}_{s=s_k} \big(g(s) e^{st}\big). \tag{3}$$

Om det reella talet a är sådant att $\operatorname{Re} s_k < a$ för alla k, gäller vidare att

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{a-iR}^{a+iR} g(s) e^{st} ds = \begin{cases} f(t), & \text{om } t > 0, \\ 0, & \text{om } t < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Bevis. Välj R så stort att alla s_k ligger innanför den vänstra halvcirkeln $C = \gamma_R + \Gamma_R$ i figuren.



Med $f(t)$ definierat av (3) ger residusatsen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C g(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\gamma_R} + \int_{\Gamma_R} g(s)e^{st} ds \right].$$

För $t \geq 0$ har vi uppskattningen

$$|f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_C |g(s)| e^{(\operatorname{Re} s)t} |ds| \leq \frac{1}{2\pi} e^{at} \int_C |g(s)| \, |ds| = Me^{at}.$$

Alltså har $f(t)$ en Laplacetransform. Antag att $t > 0$. Substitutionen $z = -i(s-a)$ överför Γ_R i en halvcirkel i övre halvplanet, och en tillämpning av Jordans lemma visar att

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} g(s)e^{st} ds = 0.$$

På samma sätt visas att $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma'_R} g(s)e^{st} ds = 0$, om $t < 0$. Eftersom $\int_{\Gamma'_R - \gamma_R} g(s)e^{st} ds = 0$ enligt Cauchys sats, så följer (4).

Det återstår nu att visa att $g(s)$ verkligen är Laplacetransformen av $f(t)$. Fixera z med $\operatorname{Re} z > a$ och låt $R > |z - a|$. Enligt Fubinis sats om omkastning av integrationsordningen är

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \int_C g(s) e^{-(z-s)t} ds \, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C g(s) \int_0^\infty e^{-(z-s)t} dt \, ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(s)}{z-s} ds = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{g(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{g(s)}{s-z} ds. \qquad (5) \end{aligned}$$

Enligt Cauchys integralformel är

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_R} \frac{g(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{g(s)}{s-z} ds. \qquad (6)$$

Ur (5) och (6) fås

$$g(z) - \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{g(s)}{s-z}\,ds,$$

där $C_R = \Gamma_R + \Gamma'_R$ är cirkeln $|s-a| = R$. Eftersom $g(s) \to 0$ då $s \to \infty$, vilket är liktydigt med att $\max_{s\in C_R}|g(s)| \to 0$ då $R \to \infty$, följer att

$$\left|\int_{C_R} \frac{g(s)}{s-z}\,ds\right| \le \frac{\max_{s\in C_R}|g(s)|}{R-|z-a|}\cdot 2\pi R \to 0 \quad \text{då } R \to \infty.$$

Alltså är

$$\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt = g(z),$$

vilket bevisar påståendet om f:s Laplacetransform. $\square$

Exempel. Förutsättningarna i Sats 2 är uppfyllda för rationella funktioner $g(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, där grad $P <$ grad Q.

Exempel. Funktionen $g(s) = \frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}$ uppfyller förutsättningarna i Sats 2. Den enda singulariteten är i origo, så $g(s)$ är Laplacetransformen av

$$f(t) = \operatorname*{Res}_{s=0} g(s)e^{st}.$$

Nu är

$$\begin{aligned} g(s)e^{st} &= \frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}e^{st} = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(-1)^n s^{-n}\cdot\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}s^k t^k \\ &= \sum_{n=0}^\infty\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^n t^k}{n!k!}s^{k-n-1}. \end{aligned}$$

Koefficienten för s^{-1} fås genom summation av alla termer med $k = n$, så att residun är

$$f(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{2\sqrt{t}}{2}\right)^{2n} = J_0(2\sqrt{t}).$$

Nästa resultat meddelar vi utan bevis.

Sats 3. *Antag att $F(s)$ är analytisk för* $\operatorname{Re} s \ge a$ *och antingen*
(1) $|F(s)| \le \frac{C}{|s|^\alpha}$ *för* $\operatorname{Re} s \ge a$ *och vissa konstanter C och $\alpha > 1$,*
eller
(1′) $|F(s)| \le \frac{C}{|s|^\alpha}$ *och* $|F'(s)| \le \frac{C'}{|s|^\beta}$ *för* $\operatorname{Re} s \ge a$ *och vissa konstanter C, C' och $\alpha > 0$, $\beta > 1$.*
Då är $F(s)$ Laplacetransformen av

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{st}ds, \quad t > 0. \tag{7}$$

Exempel. Funktionen $F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}e^{-c\sqrt{s}}$ (principalgrenen av $\sqrt{s}$) uppfyller förutsättningen (1) i Sats 3 med godtyckligt $a > 0$ om $c > 0$, ty $e^{-c\sqrt{s}}$ går mot noll fortare än varje potens av $|s|$ då $|s| \to \infty$, $\operatorname{Re} s \ge a > 0$. Om $c = 0$ är i stället förutsättningen (1′) uppfylld. Integralen i (7) kan beräknas med residukalkyl. Resultatet är att

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{c^2}{4t}}, \quad t > 0, \quad c \ge 0.$$

3. Kausala filter, Paley-Wieners sats

a. Teorin för analytiska funktioner är betydelsefull i samband med studiet av filter, dvs. tidsinvarianta, kontinuerliga, linjära system. De analytiska funktioner, som uppträder, är oftast Laplacetransformer, t.ex. ett filters överföringsfunktion $H(s)$, dvs. Laplacetransformen av impulssvaret $h(t)$. Våra tidigare diskussioner om analytiska och harmoniska funktioner i övre halvplanet måste nu anpassas till högra halvplanet. Poissons integralformel för harmoniska funktioner i högra halvplanet $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$ lyder

$$u(\sigma, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma u(0,t)}{(\omega - t)^2 + \sigma^2} \, dt.$$

Om $f(s) = u(\sigma, \omega) + iv(\sigma, \omega)$ är analytisk för $\operatorname{Re} s \geq 0$ och om $f(s) \to 0$ då $s \to \infty$ i $\operatorname{Re} s \geq 0$, råder följande samband mellan u och v på imaginäraxeln:

$$\begin{aligned} u(0, \omega) &= \mathcal{H}[v(0, \cdot)](\omega), \\ v(0, \omega) &= -\mathcal{H}[u(0, \cdot)](\omega). \end{aligned}$$

Detta gäller t.ex. om $f(s) = H(s)$ är Laplacetransformen av en kausal funktion $h(t)$, så att $H(i\omega)$ är Fouriertransformen. Antag omvänt att $\hat{u}(\omega)$ och $\hat{v}(\omega)$ är Fouriertransformer som satisfierar $\hat{u} = \mathcal{H}\hat{v}$. Då är $\hat{u} = \hat{v} * \frac{1}{\pi\omega} = \hat{v} * \mathcal{F}[\frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn} t]$, och $u(t) = iv(t) \operatorname{sgn} t$, så att $\hat{u}(\omega) + i\hat{v}(\omega) = \hat{h}(\omega)$, där $h(t) = u(t) + iv(t) = i(1 + \operatorname{sgn} t)v(t)$. Alltså är $h(t) = 0$ för $t < 0$, dvs. $h(t)$ är kausal.

b. Låt $h(t)$ vara impulssvaret för ett filter, $h(t) \not\equiv 0$. Vi vet att ett idealt lågpassfilter med

$$\hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \Omega, \\ 0, & |\omega| > \Omega, \end{cases}$$

inte är kausalt. Vad kan man säga om man bara kräver att $\hat{h}(\omega)$ skall vara 0 utanför ett ändligt intervall? Antag att $\hat{h}(\omega)$ är absolutintegrerbar och att $\hat{h}(\omega) = 0$ för $|\omega| > \Omega$. Då gäller att

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Här kan vi låta t vara en komplex variabel, och $h(t)$ blir då analytisk i hela t-planet. Om $h(t) = 0$ på negativa realaxeln ger entydighetssatsen för analytiska funktioner att $h(t) = 0$ för alla t i strid med förutsättningen. Alltså kan inte filtret vara kausalt.

c. Vi skall i fortsättningen behandla kvadratiskt integrerbara funktioner $h(t)$, dvs. sådana som uppfyller

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 \, dt < \infty,$$

vilket fysikaliskt motsvarar ändlig energi. Klassen av alla sådana funktioner kallas $L^2(\mathbb{R})$. Varje $h(t)$ har en väldefinierad Fouriertransform $\hat{h}(\omega)$, som också tillhör $L^2(\mathbb{R})$, och Plancherels formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\omega)|^2 \, d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 \, dt$$

gäller.

d. Om $h(t)$ är impulssvaret för ett kausalt filter, är $h(t) = 0$ för $t < 0$ och för Laplace-transformen $H(s)$ gäller att

$$H(s) = \int_0^\infty h(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^\infty h(t)e^{-\sigma t}e^{-i\omega t}dt = \mathcal{F}[h(t)e^{-\sigma t}](\omega).$$

Plancherels formel ger

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty |H(\sigma + i\omega)|^2\, d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^\infty |h(t)e^{-\sigma t}|^2\, dt = 2\pi \int_0^\infty |h(t)|^2 e^{-2\sigma t}\, dt \\ \le 2\pi \int_0^\infty |h(t)|^2\, dt = M < \infty \quad \text{för alla } \sigma > 0.\end{aligned}$$

Omvänt, om $H(s)$ är analytisk för $\operatorname{Re} s > 0$ och om det finns en konstant $M < \infty$ så att

$$\int_{-\infty}^\infty |H(\sigma + i\omega)|^2\, d\omega \le M \quad \text{för alla } \sigma > 0,$$

så finns det en funktion $h(t)$ sådan att $h(t) = 0$ för $t < 0$, $\int_0^\infty |h(t)|^2 dt < \infty$, $H(i\omega) = \hat{h}(\omega)$ och

$$H(s) = \int_0^\infty h(t)e^{-st}dt, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Denna sats kallas *Paley-Wieners sats.*

Definition. Man säger att $f \in H^2$ om det finns en konstant M så att

$$\int_{-\infty}^\infty |f(\sigma + i\omega)|^2\, d\omega \le M \qquad \text{för alla } \sigma > 0.$$

Allmännare sägs f tillhöra H^p, $1 \le p < \infty$, om det finns en konstant M så att

$$\int_{-\infty}^\infty |f(\sigma + i\omega)|^p\, d\omega \le M \qquad \text{för alla } \sigma > 0,$$

och f tillhör H^∞ om det finns en konstant M så att

$$|f(\sigma + i\omega)| \le M \qquad \text{för alla } \sigma > 0,\ -\infty < \omega < \infty,$$

dvs. om f är begränsad i halvplanet $\operatorname{Re} s > 0$.

Paley-Wieners sats kan nu formuleras som att $h(t)$ är kausal om och endast om Laplace-transformen $H(s)$ tillhör H^2.

e. Ibland vill man konstruera ett filter med given amplitudkarakteristik $A(\omega)$, dvs. man vill finna $\Phi(\omega)$ och en funktion $h(t)$ med $h(t) = 0$ för $t < 0$ så att

$$\hat{h}(\omega) = H(i\omega) = A(\omega)e^{i\Phi(\omega)}.$$

Sats 4. *Om $\int_{-\infty}^\infty [A(\omega)]^2\, d\omega < \infty$, kan man hitta sådana Φ och h om och endast om*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{|\ln A(\omega)|}{1 + \omega^2}\, d\omega < \infty. \tag{8}$$

Om $A(\omega)$ uppfyller (8), definierar man $u(\sigma, \omega)$ med hjälp av Poissonintegralen:

$$u(\sigma, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma \ln A(\omega')}{(\omega - \omega')^2 + \sigma^2} \, d\omega'.$$

Då blir $u(\sigma, \omega)$ harmonisk för $\sigma > 0$, och $u(0, \omega) = \ln A(\omega)$. Konstruera sedan harmoniska konjugatet $v(\sigma, \omega)$. Sätt

$$H(s) = e^{u(\sigma,\omega)+iv(\sigma,\omega)}, \quad s = \sigma + i\omega.$$

Då blir $H(s)$ analytisk för $\operatorname{Re} s > 0$, och $|H(i\omega)| = e^{u(0,\omega)} = A(\omega)$. Man får också att $H \in H^2$. Enligt Paley-Wieners sats finns då $h(t)$, så att $h(t) = 0$ för $t < 0$, $H(s) = \int_0^\infty h(t) e^{-st} \, dt$ för $\operatorname{Re} s > 0$ och $H(i\omega) = \hat{h}(\omega)$.

Problemet att bestämma en funktion $H(s)$ som är analytisk i $\operatorname{Re} s > 0$, då randvärdena $A(\omega) = |H(i\omega)|$ är givna, har många lösningar. Den ovan skisserade lösningen $H(s)$ har den extra egenskapen att $H(s) \neq 0$ i $\operatorname{Re} s > 0$. Motsvarande filter sägs vara av *minimifastyp*. För varje komplex konstant a med $\operatorname{Re} a > 0$ gäller att funktionen $w = \frac{s-a}{s+\bar{a}}$ avbildar imaginäraxeln på cirkeln $|w| = 1$. Om $H(s)$ multipliceras med ett antal sådana faktorer fås en ny funktion som är analytisk i $\operatorname{Re} s > 0$ och har samma randvärden $A(\omega)$. Omvänt kan en given $H(s)$ faktoriseras på antytt sätt. Låt oss studera en rationell funktion litet närmare. Antag att $H(s)$ har nollställena a_k med $\operatorname{Re} a_k > 0$ för $k = 1, \dots, n$, medan övriga nollställen och samtliga poler har negativ realdel (stabilt filter). Då kan $H(s)$ faktoriseras som

$$H(s) = H_1(s) B(s),$$

där

$$B(s) = \frac{s - a_1}{s + \bar{a}_1} \cdot \dots \cdot \frac{s - a_n}{s + \bar{a}_n},$$

och där $H_1(s)$ är en rationell funktion som är analytisk och skild från 0 i $\operatorname{Re} s > 0$. Vidare är $|H_1(i\omega)| = |H(i\omega)|$. Produkten $B(s)$ kallas en *Blaschkeprodukt*. Att $H_1(s)$ (eller motsvarande filter) sägs vara av minimifastyp torde bero på att fasvariationen hos $H_1(s)$ längs imaginäraxeln är minst bland alla $H(s)$ med samma poler och samma antal nollställen och med samma värden $A(\omega) = |H(i\omega)|$.