

Inlämningsuppgift 1 för Analytiska funktioner E3, 2002: Strömnings- och potentialproblem

Funktionen $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ har många intressanta avbildningsegenskaper. Låt $z = re^{i\theta}$, $w = u + iv = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{1}{2}(re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta})$. Då är

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta,$$

$$v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta.$$

Välj $r > 1$ fixt. Då avbildas cirkeln $|z| = r$ på ellipsen

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

där $a = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$, $b = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})$. Ellipsens brännpunkter är $\pm c$, där $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$ oberoende av r . Då r avtar mot 1, krymper ellipsen mot intervallet $[-1, 1]$ på realaxeln. Då r växer från 1 mot ∞ , sveper cirklarna $|z| = r$ över området $|z| > 1$. Ellipsernas halvaxlar a och b växer också mot ∞ , och ellipserna sveper över området utanför intervallet $-1 \leq u \leq 1$, $v = 0$. Funktionen $f(z)$ ger alltså en ett-ett-avbildning mellan området $|z| > 1$ och området utanför $-1 \leq u \leq 1$, $v = 0$ (ett uppskuret w -plan). Detta kommer också att visas nedan på ett litet striktare sätt. Eftersom z och $\frac{1}{z}$ avbildas på samma punkt, så har vi också en ett-ett-avbildning mellan $|z| < 1$ och det uppskurna w -planet. Vi ser också t.ex. att området $|z| > 1$, $\text{Im } z > 0$ avbildas på $\text{Im } w > 0$. Funktionen kan alltså användas för att beskriva strömning runt ett hinder (se övning 8.6:8 i boken).

Vi såg ovan att $f(z)$ är en ett-ett-avbildning mellan vissa områden. Vi vill beräkna inversen och löser därför ekvationen $2w = z + \frac{1}{z}$, $z^2 - 2wz + 1 = 0$ med den formella lösningen

$$z = w \pm \sqrt{w^2 - 1}.$$

Frågan är dock vilken gren av $\sqrt{w^2 - 1}$ som skall väljas. Det kan man komma fram till på olika sätt. Ett sätt (som också ger ett bevis för den ovan beskrivna avbildningsegenskapen) är följande. Inför variablerna $z_1 = \frac{z-1}{z+1}$ och $w_1 = \frac{w-1}{w+1}$. Då motsvarar området $|z| > 1$ det högra halvplanet $\text{Re } z_1 > 0$, och området utanför $-1 \leq u \leq 1$, $v = 0$ motsvarar w_1 -planet uppskuret utefter negativa realaxeln (kontrollera!). Sambandet $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ övergår i $w_1 = z_1^2$. Det är då klart att $z_1 = w_1^{1/2}$, där $w_1^{1/2}$ betecknar principalgrenen. Vi får

$$z = \frac{1 + w_1^{1/2}}{1 - w_1^{1/2}} = \frac{(1 + w_1^{1/2})^2}{1 - w_1} = \frac{1 + w_1 + 2w_1^{1/2}}{1 - w_1}$$

$$= \frac{1 + \frac{w-1}{w+1} + 2\left(\frac{w-1}{w+1}\right)^{1/2}}{1 - \frac{w-1}{w+1}} = w + (w+1) \left(\frac{w-1}{w+1}\right)^{1/2}.$$

Den sista termen, som är analytisk utanför $-1 \leq u \leq 1$, $v = 0$, har kvadraten $w^2 - 1$, och är alltså en gren av $(w^2 - 1)^{1/2}$. Det är den gren som också kan införas som (se boken)

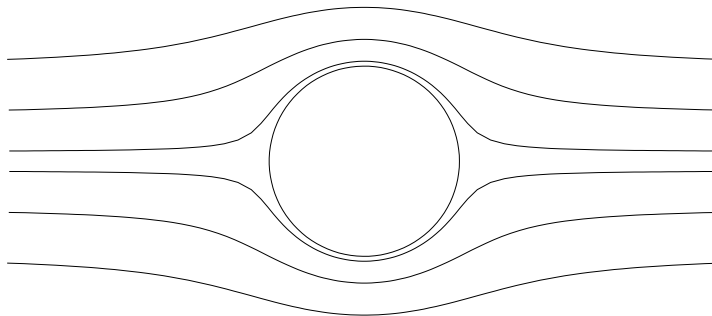
$$(w^2 - 1)^{1/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}},$$

där $w - 1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $w + 1 = r_2 e^{i\theta_2}$ för $0 < \theta_1 < 2\pi$, $0 < \theta_2 < 2\pi$, och också för $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Så vi har alltså

$$z = f^{-1}(w) = w + (w^2 - 1)^{1/2}$$

med den ovan beskrivna grenen av $(w^2 - 1)^{1/2}$.

En likformig strömning i w -planet parallell med u -axeln beskrivs av den komplexa potentialen $\Phi = Aw$, där A en reell, positiv konstant. I z -planet fås då en strömning med den komplexa potentialen $\Phi = \frac{A}{2}(z + \frac{1}{z})$. Hastighetsvektorn är $\frac{d\Phi}{dz} = \frac{A}{2}(1 - \frac{1}{z^2})$ som går mot $\frac{A}{2}$ då $|z| \rightarrow \infty$. Den komplexa potentialen för en strömning runt $|z| = 1$ som för stora $|z|$ är likformig med hastigheten V_0 är alltså $\Phi = V_0(z + \frac{1}{z})$. Strömlinjernas ekvationer är $\psi = \text{Im } \Phi = \text{konst.}$, dvs. $(1 - \frac{1}{x^2+y^2})y = k$. Värdena ± 0.1 , ± 0.5 , ± 1 på k ger en ganska bra bild av strömningen.

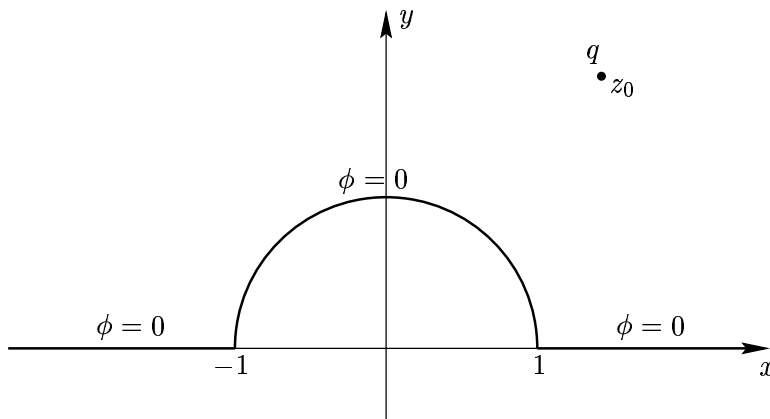


Uppgift a. (Strömning kring en vingprofil) Om man använder avbildningen $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ och avbildar cirklar som ligger "nära" enhetscirkeln kan man få intressanta bilder. Prova med cirklar $|z - c| = r$, där c kan vara t.ex. 0.1 , $0.1 + 0.1i$, $0.1 + 0.2i$, och $r = |c + 1|$ (så att cirkeln går genom $z = -1$) eller $r = |c + 1| + 0.05$ (så att $z = -1$ ligger strax innanför cirkeln). Använd kommandot `axis('equal')` för att få lika skalning av axlarna. Då liknar figurerna en vingprofil, och detta kan användas för att studera strömning kring en flygplansvinge (funktionen $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ kallas ofta Joukowski-funktionen efter en rysk aerodynamiker).

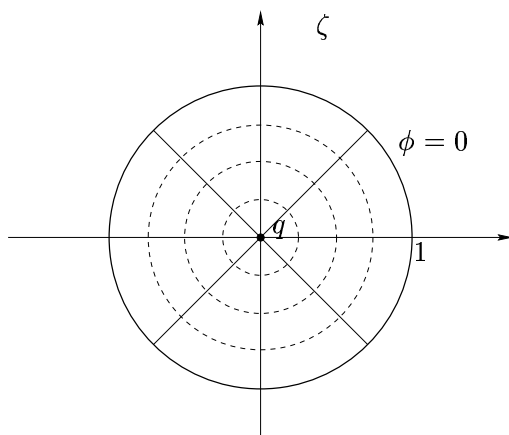
Uppgiften är nu att rita strömlinjerna runt en vingprofil. Låt B vara sista siffran i ditt personnummer. Tag $c = \frac{5+B}{100} + i\frac{10+B}{100}$ och $r = |c| + 1.05$ så att cirkeln $|z - c| = r$ ligger utanför enhetscirkeln. Då kan man använda uttrycket för $f^{-1}(w)$ ovan för att gå från w till z . Eftersom MATLAB:s kommando `sqrt` ger principalvärden, beräknas $(w^2 - 1)^{1/2}$ som `(w+1)*sqrt((w-1)/(w+1))`. Genom translation och skalning övergår cirkeln $|z - c| = r$ i enhetscirkeln i ett z_1 -plan. Enligt ovan är den komplexa potentialen för en strömning runt $|z_1| = 1$ (om $V_0 = 1$) $\Phi = z_1 + \frac{1}{z_1}$. Strömlinjerna ges av $\psi = \text{Im } \Phi = \text{konst.}$ Det finns olika sätt att rita dessa i w -planet. Om man beskriver ψ som funktion av w kan man använda kommandot `contour`. Då definierar man med `meshgrid` ett rektangulärt rutnät som innehåller vingprofilen (tag t.ex. $-2 \leq u \leq 2$, $-2 \leq v \leq 2$). Detta rutnät täcker området innanför vingprofilen, och man måste se till att ingenting ritas där. Det görs kanske enklast genom att man helt enkelt sätter $\psi = 0$ då $|z_1| < 1$. En annan möjlighet är att genom ytterligare en Joukowski-avbildning avbilda $|z_1| > 1$ på ett uppskuret w_1 -plan (det är ju så man får uttrycket för Φ : $\Phi = 2V_0w_1 = 2w_1$) och parametrisera några strömlinjer $\text{Im } w_1 = \text{konst.}$ (t.ex. för $|\text{Re } w_1| \leq 2$). Dessa avbildas sedan på strömlinjer i w -planet genom en sammansatt avbildning $w_1 \mapsto z_1 \mapsto z \mapsto w$. Använd komplexa variabler och låt MATLAB i tur och ordning beräkna z_1 , z , och w . Sedan är det bara att skriva `plot(w)`. Använd kommandot `hold on` för att kunna rita flera kurvor i samma figur.

Lämna in en bild som visar vingprofilen och ett antal strömlinjer runt den. Bifoga också MATLAB-koden, så att det framgår vilken metod du har använt för att rita strömlinjerna.

Uppgift b. (Elektriskt fält) Vi skall studera fältbilden från en punktladdning (egentligen linjeladdning) q i punkten z_0 i området $\text{Im } z > 0$, $|z| > 1$, då randen (bestående av halvcirkeln $|z| = 1$, $y > 0$ och den del av realaxeln där $|x| \geq 1$) har potentialen noll. Detta kan vara en modell för ett åskmoln ovanför en slätt med en ås.



Med avbildningen $w = f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ fås motsvarande problem i halvplanet $\text{Im } w > 0$. Möbiusavbildningen $\zeta = g(w) = \frac{w-w_0}{w-\bar{w}_0}$ avbildar sedan $\text{Im } w > 0$ på $|\zeta| < 1$ med punktladdningen i origo (kontrollera). Den komplexa potentialen i ζ -planet är $\Phi = -\frac{q}{2\pi\epsilon} \log \zeta$. Fältlinjerna strålar ut radiellt, medan ekvipotentiallinjerna är koncentriska cirklar.



Låt A och B vara de två sista siffrorna i ditt personnummer, och låt z_0 vara punkten $z_0 = \frac{A+3}{7} + i\frac{B+10}{8}$. Rita i z -planet fältlinjer och ekvipotentiallinjer motsvarande linjerna i ζ -planet (undvik radien med $\arg \zeta = 0$, ty $\zeta = 1$ ger $z = \infty$). Det enklaste är kanske att parametrisera var och en av kurvorna i ζ -planet och sedan låta MATLAB räkna ut $w = g^{-1}(\zeta)$, $z = f^{-1}(w)$. Sätt $\frac{q}{2\pi\epsilon} = 1$. Varning: delar av randen $|\zeta| = 1$ hamnar på snittet för rotfunktionen, och avrundningsfel kan göra att man får fel värde på $w_1^{1/2}$ och därmed på z . Undvik alltså att ligga precis på randen; på en radie kan $|\zeta|$ få variera från 0 till t.ex. $1 - 10*\text{eps}$.

Lämna in en bild med fältlinjer och ekvipotentiallinjer i z -planet och tillhörande MATLAB-kod.