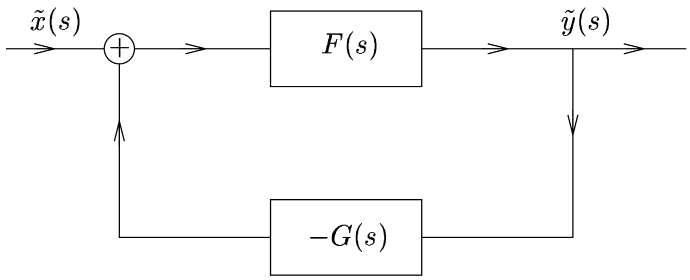
Inlämningsuppgift 2 för Analytiska funktioner E3, 2002: Stabilitet hos filter

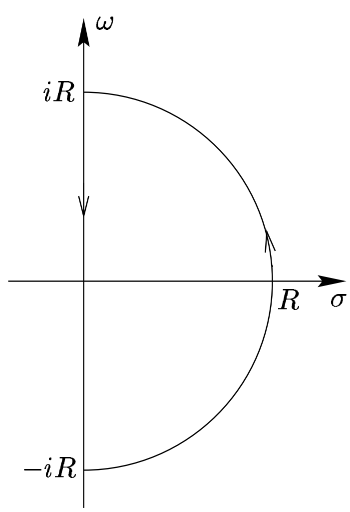
Ett återkopplat system enligt figur har totala överföringsfunktionen $H(s) = \frac{F(s)}{F(s)G(s)+1}$.



Antag att

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+1.7s-2}, \quad G(s) = \frac{k(s^2+3)}{s^3+1.9s^2+As+B+6},$$

där A och B är de två sista siffrorna i ditt personnummer. Uppgiften är först att bestämma för vilka reella värden på k ($k \neq 0$) som det återkopplade systemet är stabilt. Detta är fallet då $F(s)G(s)+1$ saknar nollställen i högra halvplanet och på imaginäraxeln. Man kan använda argumentprincipen på funktionen $F(s)G(s)+1$ och en stor halvcirkel i högra halvplanet enligt



figur. Eftersom bilden av halvcirkelbågen $|s| = R$, $\operatorname{Re} s \geq 0$, krymper mot en punkt då $R \to \infty$, räcker det att studera bilden av imaginäraxeln, som blir en sluten kurva. Kurvan $z = F(i\omega)G(i\omega)$ då ω växer från $-\infty$ till ∞ kallas i reglertekniken för *Nyquistdiagrammet*. Observera att orienteringen av imaginäraxeln för Nyquistdiagrammet är motsatt den som har använts i figuren ovan. Skriv ekvationen $F(s)G(s)+1=0$ på formen $H_0(s) + \frac{1}{k} = 0$, där

$$H_0(s) = \frac{(s+2)(s^2+3)}{(s^2+1.7s-2)(s^3+1.9s^2+As+B+6)}.$$

Antalet nollställen i högra halvplanet hänger alltså ihop med hur många varv som Nyquistdiagrammet till $H_0(s) + \frac{1}{k}$ går runt origo, dvs. hur många varv som Nyquistdiagrammet till $H_0(s)$

går runt punkten $-\frac{1}{k}$. Tänk igenom detta ordentligt, så att du förstår hur många varv det handlar om vid stabilitet. Man behöver veta hur många poler som $H_0(s) + \frac{1}{k}$ har i högra halvplanet. Dessa, som ges av nollställena till $(s^2 + 1.7s - 2)(s^3 + 1.9s^2 + As + B + 6)$, beräknas lätt m.h.a. MATLAB. Man avläser ur diagrammet ett intervall av k-värden som ger stabilitet. Skriv nu $H(s)$ som en rationell funktion:

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{(s+2)(s^3 + 1.9s^2 + As + B + 6)}{k(s+2)(s^2+3) + (s^2 + 1.7s - 2)(s^3 + 1.9s^2 + As + B + 6)}.$$

Graden av stabilitet avgörs av polerna med störst realdel. Låt $\sigma(k)$ vara den största realdelen som förekommer hos polerna till $H(s)$ (dvs. nollställena till $Q(s)$). Rita $\sigma(k)$ som funktion av k i (en lämplig del av) stabilitetsintervallet som bestämdes ovan. Kontrollera att funktionsvärdena verkligen är negativa för alla k. Avläs ur grafen ungefär vilket k-värde som minimerar $\sigma(k)$. Detta k-värde bör göra systemet maximalt stabilt. Rita avslutningsvis för detta k-värde systemets impulssvar $h(t)$, dvs. den inversa Laplacetransformen till $H(s)$.

MATLAB-tips: Några användbara kommandon är `conv`, `roots`, `real` och `max`. Kommandot `[r,p]=residue(P,Q)` returnerar en vektor p, vars element p_j är polerna till $H(s)$, och en vektor r bestående av motsvarande residuer r_j. Vi får alltså partialbråksuppdelningen $H(s) = \sum_j \frac{r_j}{s-p_j}$ (vi förutsätter enkelpoler), och sedan är det lätt att få $h(t) = \sum_j r_j e^{p_j t}$.

Uppgift. Rita (med MATLAB) Nyquistdiagrammet för $H_0(s)$ och markera (manuellt?) genomloppsriktningen (svarande mot växande ω enligt ovan). Beskriv hur argumentprincipen används för att bestämma hur många varv som kurvan skall gå runt punkten $-\frac{1}{k}$ för ett stabilt system. Avläs därefter ur diagrammet för vilka reella k-värden (approximativt) som systemet blir stabilt. Använd vid behov `zoom`-funktionen för att se detaljer i kurvan. Rita funktionen $\sigma(k)$ och bestäm det k-värde som ger minimum. Rita till sist impulssvaret $h(t)$ för detta k-värde.