Chapter 3. The Basic Transcendental Functions

De elementära funktionerna som analytiska funktioner.

Särskild betoning på flervärda funktioner och konstruktionen av grenar för sådana. Oftast handlar det om att bestämma sig för ett område där argumentfunktionen är entydig och kontinuerlig.

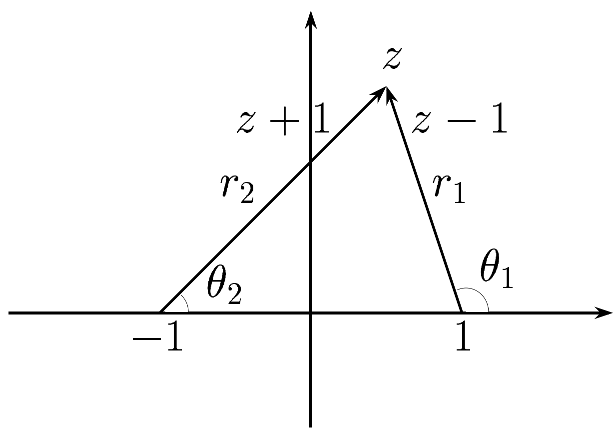
Ex. Om $z = re^{i\theta}$, är $\log z = \ln r + i\theta$ analytisk i ett *uppskuret plan* $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$. Motsvarande gäller sedan för funktioner $z^c = e^{c \log z}$, c konstant. Speciellt för $c = \frac{1}{2}$: $z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Genom att kombinera två kvadratrötter fås några viktiga funktioner.

Ex. Med $z - 1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z + 1 = r_2 e^{i\theta_2}$, är

$$\begin{aligned}(z^2-1)^{\frac{1}{2}} &= (z-1)^{\frac{1}{2}}(z+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r_1}e^{i\frac{\theta_1}{2}}\sqrt{r_2}e^{i\frac{\theta_2}{2}} = \sqrt{r_1 r_2}e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \\ &= \sqrt{|z^2-1|}e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}.\end{aligned}$$

Med olika val av snitt fås olika grenar av $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ (som i det här fallet skall uppfattas som en hel symbol och inte som en sammansättning mellan en kvadratrotsfunktion och $z^2 - 1$).



Chapter 8. Conformal Mapping and Some of Its Applications

Antag $f'(z_0) \neq 0$. Om $z(t)$ är en kurva med $z(t_0) = z_0$, är

$$\arg \frac{d}{dt} f(z(t))|_{t_0} = \arg[f'(z_0)z'(t_0)] = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$$

Bildkurvans tangent vrids vinkeln $\arg f'(z_0)$. Skärningsvinklar bevaras. Mera precist:

SATS: Låt C_1 och C_2 vara två glatta kurvor, som skär varandra i z_0 under en vinkel α. Låt f vara analytisk med $f'(z_0) \neq 0$. Avbildningen $w = f(z)$ avbildar C_1 och C_2 på två kurvor C_1' och C_2', som också är glatta och skär varandra i $w_0 = f(z_0)$ under vinkeln α.

8.4. Möbiusavbildningar.

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

Med $T(-\frac{d}{c}) = \infty$ och $T(\infty) = \frac{a}{c}$ fås en ett-ett-avbildning av $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ på $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$; $z = T^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$. Konform avbildning, ty $T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$ för $z \in \mathbb{C}$.

"cirkel"= cirkel eller rät linje (cirkel på Riemann-sfären).

SATS: T avbildar "cirklar" på "cirklar".

Definition av inversa punkter.

SATS: Om z och z^* är inversa m.a.p. en "cirkel" C, så är $T(z)$ och $T(z^*)$ inversa m.a.p. $T(C)$ (som också är en "cirkel" enligt föregående sats).

Grundläggande avbildningsproblem:
Avbilda tre olika punkter z_1, z_2, z_3 på tre olika w_1, w_2, w_3. Ansätt

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = k\frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad k \neq 0.$$

Bestäm k genom att sätta in $z = z_3$ och $w = w_3$. Lös ut w så fås en Möbiusavbildning $w = T(z)$ med de önskade egenskaperna. Den är entydigt bestämd.

För att avbilda ett område D, som begränsas av en "cirkel" C, på ett område D', som begränsas av en "cirkel" C', avbilda en punkt $z_1 \in D$ på $w_1 \in D'$, en punkt $z_2 \in C$ på $w_2 \in C'$ och slutligen den inversa punkten z_1^* till z_1 m.a.p. C på den inversa punkten w_1^* till w_1 m.a.p. C'.

Exempel på sammansatt avbildning.

Avbilda kvartscirkelskivan $|z| < 1$, $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ konformt på enhetscirkeln $|w| < 1$.

1. Fäll ut vinkeln i origo: $z_1 = z^2$.

2. Avbilda på första kvadranten så att $z_1 = -1$ går på $z_2 = 0$, $z_1 = 1$ går på $z_2 = \infty$, och $z_1 = 0$ går på en punkt på positiva realaxeln, t.ex. $z_2 = 1$.

$$z_2 = \frac{1 + z_1}{1 - z_1}$$

3. Fäll ut vinkeln: $z_3 = z_2^2$.

4. Möbiusavbildning till enhetscirkeln:

$$w = \frac{z_3 - i}{z_3 + i}$$

5. Totalt blir

$$w = \frac{z_2^2 - i}{z_2^2 + i} = \frac{(\frac{1+z_1}{1-z_1})^2 - i}{(\frac{1+z_1}{1-z_1})^2 + i} = \frac{(1 + z^2)^2 - i(1 - z^2)^2}{(1 + z^2)^2 + i(1 - z^2)^2}$$