Inlämningsuppgift 2 för Analytiska funktioner E3, 2003: Stabilitet hos filter

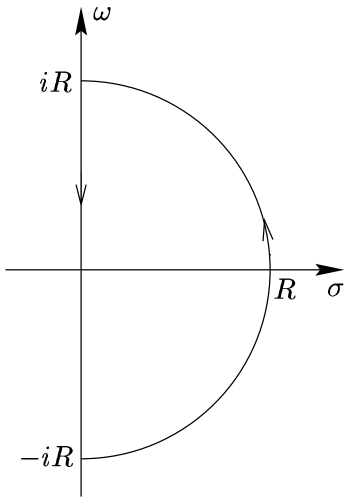
Om ett linjärt tidsinvariant system har överföringsfunktionen $H(s)$ så avgörs ju systemets stabilitet av var polerna till $H(s)$ är lokaliserade; stabilitet kräver att polerna ligger i vänstra halvplanet ($\operatorname{Re} s < 0$). Användning av argumentprincipen är här ett viktigt verktyg, speciellt om $H(s)$ innehåller parametrar som skall väljas på ett lämpligt sätt. Antag att

$$H(s) = \frac{s^4 - 3.7s^3 + 2.8s^2 + s + 1}{s^5 + 3.6s^4 + 4.5s^3 + 9s^2 + As - B - 6 + k(s^3 + 2s^2 + 3s + 6)} = \frac{P(s)}{Q(s)},$$

där A och B är de två sista siffrorna i ditt personnummer, och där $k \neq 0$ är en reell parameter. Man kan naturligtvis använda argumentprincipen direkt på $H(s)$, men det är opraktiskt, eftersom man får en kurva för varje k-värde. I stället studerar man ekvationen $Q(s) = 0$, och skriver den på formen $F(s) + \frac{1}{k} = 0$, där

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 6}{s^5 + 3.6s^4 + 4.5s^3 + 9s^2 + As - B - 6}.$$

Man kan nu använda argumentprincipen på funktionen $F(s) + \frac{1}{k}$ och en stor halvcirkel i högra halvplanet enligt figur.



Om N är antalet nollställen och P antalet poler till $F(s) + \frac{1}{k}$ i högra halvplanet, så går bildkurvan $N - P$ varv runt origo för varje tillräckligt stort R. Men eftersom nollställena till $F(s) + \frac{1}{k}$ är polerna till $H(s)$, så är stabilitetskriteriet att $N = 0$. Detta är fortfarande k-beroende, men det räcker nu att rita bilden av den slutna halvcirkeln under avbildningen $F(s)$, och stabilitetskriteriet blir då att denna bildkurva skall gå $-P$ varv runt punkten $-\frac{1}{k}$. Eftersom $F(s) + \frac{1}{k}$ har samma poler som $F(s)$, kan man lätt beräkna P genom att låta MATLAB beräkna nollställena till $s^5 + 3.6s^4 + 4.5s^3 + 9s^2 + As - B - 6$. Bilden av halvcirkelbågen $|s| = R$, $\operatorname{Re} s \geq 0$, krymper mot en punkt då $R \to \infty$, så det räcker att studera bilden av imaginäraxeln, som blir en sluten kurva. Kurvan $z = F(i\omega)$ då ω växer från $-\infty$ till ∞ kallas i reglertekniken för *Nyquistdiagrammet*. Observera att orienteringen av imaginäraxeln för Nyquistdiagrammet är motsatt den som har använts i figuren ovan. Rita nu Nyquistdiagrammet till $F(s)$ och avläs vilka punkter $-\frac{1}{k}$ som omringas P varv (i positiv led).

Graden av stabilitet avgörs av polerna med störst realdel. Låt $\sigma(k)$ vara den största realdelen som förekommer hos polerna till $H(s)$ (dvs. nollställena till $Q(s)$). Rita $\sigma(k)$ som funktion av k i (en lämplig del av) stabilitetsintervallet som bestämdes ovan. Kontrollera att funktionsvärdena verkligen är negativa för dessa k. Avläs ur grafen ungefär vilket k-värde som minimerar $\sigma(k)$. Detta k-värde bör göra systemet maximalt stabilt. Rita avslutningsvis för detta k-värde systemets impulssvar $h(t)$, dvs. den inversa Laplacetransformen till $H(s)$.

MATLAB-tips: Några användbara kommandon är `roots`, `real` och `max`. Kommandot `[r,p]= residue(P,Q)` returnerar en vektor p, vars element p_j är polerna till $H(s)$, och en vektor r bestående av motsvarande residuer r_j. Vi får alltså partialbråksuppdelningen $H(s) = \sum_j \frac{r_j}{s-p_j}$ (vi förutsätter enkelpoler), och sedan är det lätt att få $h(t) = \sum_j r_j e^{p_j t}$.

Uppgift. Rita (med MATLAB) Nyquistdiagrammet för $F(s)$ och markera (manuellt?) genomloppsriktningen (svarande mot växande ω enligt ovan). Avläs ur diagrammet för vilka reella k-värden (approximativt) som systemet blir stabilt. Använd vid behov `zoom` -funktionen för att se detaljer i kurvan. Rita funktionen $\sigma(k)$ och bestäm det k-värde som ger minimum. Rita till sist impulssvaret $h(t)$ för detta k-värde.