LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMENSSKRIVNINGEN I ANALYTISKA FUNKTIONER FÖR TMA035
2006-10-24

1. Bevisa satsen om Taylorsutveckling av en funktion f som är analytisk i en omgivning av en punkt z_0.

Se kursboken.

2. Formulera Cauchy-Goursats sats. Bevisa satsen för funktioner $f(z)$ med kontinuerlig derivata.

Se kursboken

3. Vad menas med att en funktion $f(z)$ är analytisk i ett område? Definiera begreppet harmonisk i ett område funktion. Vilket samband finns det mellan harmoniska och analytiska funktioner? Visa att $v(x,y) = e^{-2x}(y\cos 2y - x\sin 2y)$ kan vara imaginärdelen av en analytisk funktion $f(z)$. Bestäm $f(z)$.

För funktionen $v(x,y) = e^{-2x}(y\cos 2y - x\sin 2y)$ gäller att

$$v'_x = -2e^{-2x}(y\cos 2y - x\sin 2y) - e^{-2x}\sin 2y, \quad v'_y = e^{-2x}(\cos 2y - 2y\sin 2y - 2x\cos 2y),$$
$$v''_{xx} = 4e^{-2x}(y\cos 2y - x\sin 2y + \sin 2y) = -v''_{yy}.$$

Alltså är $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$, varför är v harmonisk i hela planet. Det finns en analytisk funktion $f(z)$ sådan att $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, där u och v satisfierar Cauchy-Riemanns ekvationer: $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$. Ur $u'_y = -v'_x = 2e^{-2x}(y\cos 2y - x\sin 2y) + e^{-2x}\sin 2y$ följer att $u(x,y) = e^{-2x}y\sin 2y + e^{-2x}x\cos 2y + \psi(x)$. Ekvationen $v'_y = u'_x$ ger

$$e^{-2x}(\cos 2y - 2y\sin 2y - 2x\cos 2y) = -2e^{-2x}y\sin 2y - 2e^{-2x}x\cos 2y + e^{-2x}\cos 2y + \psi'(x)$$

och $\psi'(x) = 0$, $\psi(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Vi har att

$$f(z) = e^{-2x}(y\sin 2y + x\cos 2y) + C + ie^{-2x}(y\cos 2y - x\sin 2y).$$

För $z = x + i0$ får man $f(x) = e^{-2x}x + C$. Eftersom $g(z) = e^{-2z}z + C$ är analytisk och $f(z) = g(z)$ på reella axeln, ger entydighetssatsen att $f(z) = g(z) = e^{-2z}z + C$ i hela komplexa planet.

Alternativt. För derivatan $f'(z)$ gäller att

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y + iv'_x = e^{-2x}(\cos 2y - 2y\sin 2y - 2x\cos 2y) - i(2e^{-2x}(y\cos 2y - x\sin 2y) + e^{-2x}\sin 2y).$$

Eftersom $f'(z)$ är analytisk, enligt samma resonomang som ovan kan man få uttrycket för $f'(z)$ genom att sätta $y = 0$ och sedan ersätta x med z: $f'(z) = e^{-2z} - 2ze^{-2z}$, varför $f(z) = e^{-2z}z + C$, där C är en konstant. Men $f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = u(0,0) + i0 = D$, så att C är reel.

Svar: $f(z) = e^{-2z}z + C$ ($C \in \mathbb{R}$).

4. Vilken typ av singulär punkt är $z = 0$ för

$$\textbf{(a)}\ f_1(z) = (z-1)^2 e^{1/z};\ \textbf{(b)}\ f_2(z) = \frac{\sinh z}{z^5 + 2z^3};\ \textbf{(c)}\ f_3(z) = \frac{(\sin z)^2}{z^2}.$$

Ange residun i $z = 0$ i ett av fallen (valet är Ditt). Motivera väl.

Utveckla $f_1(z)$ i Laurentserie kring $z = 0$ i en punkterad omgivning av $z = 0$:

$$(z-1)^2 e^{1/z} = (z^2 - 2z + 1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} z^{-n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

Eftersom det finns oändligt många negativa potenser i utvecklingen, är $z = 0$ en väsentlig singularitet för $f_1(z)$ med residun $\mathrm{Res}_{z=0} f_1(z) = \frac{1}{3!} - \frac{2}{2!} + 1 = \frac{1}{6}$.

$z = 0$ är en pol av ordning 2 för $f_2(z)$, ty $z = 0$ är ett nollställe av ordning 1 för $\sinh z$ ($\sinh 0 = 0$, $(\sinh z)'|_{z=0} = \cosh 0 \neq 0$), och ett nollställe av ordning 3 för $z^5 + 2z^3 = z^3(z^2 + 2)$. Residun kan beräknas enligt

$$\mathrm{Res}_{z=0} f_2(z) = \lim_{z\to 0}(z^2 f_2(z))' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\sinh z}{z}\frac{1}{z^2+2}\right)' =$$

$$\lim_{z\to 0}\left(\left(\frac{\sinh z}{z}\right)'\frac{1}{z^2+2} - \frac{\sinh z}{z}\frac{2z}{(z^2+2)^2}\right) = 0$$

Man använder att

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sinh z}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}}{z} = \lim_{z\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = 1$$

och att

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sinh z}{z}\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k+1)!}\right)' = \lim_{z\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2kz^{2k-1}}{(2k+1)!} = 0$$

Dessa gränsvärde kan man också beräkna med hjälp av L'Hopitals regel.

För $f_3(z)$ har man att $z=0$ är ett nollställe av ordning 2 både för täljaren och nämnaren som visar att $z=0$ är en hävbar singularitet för $f_3(z)$ och därför $\mathrm{Res}_{z=0} f_3(z) = 0$.

4. Beräkna integralen med hjälp av residukalkyl

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}, \quad a>1.$$

$I = \displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}$. Sätt $z=e^{i\theta}$, $-\pi\le\theta\le\pi$. Då genomlöper z enhetcirkeln C, $|z|=1$, $\cos\theta = (e^{i\theta}+e^{-i\theta})/2 = (z+z^{-1})/2$ och

$$I = \frac{1}{2}\int_C \frac{1}{(a+(z+z^{-1})/2)^2}\frac{dz}{iz} = \frac{2}{i}\int_C\frac{z}{(z^2+2az+1)^2}dz.$$

$z^2+2az+1=0$ ger $z_1 = -a+\sqrt{a^2-1}$, $z_2 = -a-\sqrt{a^2-1}$ så att $z^2+2az+1 = (z-z_1)(z-z_2)$. Innanför cirkeln C ligger z_1 som är en pol av ordning 2. Vidare

$$\mathrm{Res}_{z=z_1}\frac{z}{(z^2+2az+1)^2} = \left(\frac{(z-z_1)^2 z}{((z-z_1)(z-z_2))^2}\right)'|_{z=z_1} = \frac{-z-z_2}{(z-z_2)^3}|_{z=z_1} = \frac{a}{4(\sqrt{a^2-1})^3}.$$

Residusatsen ger nu

$$I = 2\pi i\frac{2}{i}\mathrm{Res}_{z=z_1}\frac{z}{(z^2+2az+1)^2} = \frac{\pi a}{(\sqrt{a^2-1})^3}.$$

6. Bestäm Laurentserien för $f(z) = \dfrac{z}{(z+2)^2(z-1)}$ runt $z=0$ i området som innehåller punkten $z=3/2$. Använd detta för att beräkna $\int_C \frac{f(z)}{z^k}dz$ där C är cirkeln $|z|=3/2$ och k är ett positivt tal.

Funktionen har poler i $z=-2$ och $z=1$ så finns Laurentsutvecklingar i cirkelringarna $|z|<1$, $1<|z|<2$ och $|z|>2$, där funktionen är analytisk. Eftersom $z=3/2$ ligger i området $1<|z|<2$ söker vi utvecklingen som konvergerar för $1<|z|<2$. Partialbråksuppdelning ger

$$f(z) = -\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z+2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z-1}.$$

För $|z|>1$ är

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}$$

och för $|z|<2$ är

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2(1+z/2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$$

och

$$\frac{1}{(z+2)^2} = -\left(\frac{1}{z+2}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^{n+1}}z^{n-1}.$$

Alltså är $\boxed{f(z) = -\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+2}}z^n + \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}}$

Laurentsatsen ger att $\int_C \frac{f(z)}{z^k}dz = 2\pi i c_{k-1}$, där c_k är koefficienten framför z^k i Laurentsutvecklingen i $1 < |z| < 2$, varav $\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} = \pi i\frac{(-1)^n(3n+2)}{9\cdot 2^n}$ om $n \geq 0$ och $\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} = \frac{2\pi i}{9}$ om $n < 0$.

7. Bestäm antalet rötter till ekvationen $z^2 - ae^z = 0$, där $0 < a < e^{-1}$ i $|z| = 1$. Visa att de är reella.

Skriv $z^2 - ae^z = f(z) + g(z)$ med $f(z) = z^2$ och $g(z) = -ae^z$. Om $|z| = 1$ så är $|f(z)| = |z|^2 = 1$ och $|g(z)| = ae^x \leq ae < 1$ (Obs! $a < e^{-1}$). Alltså är $|g(z)| < |f(z)|$ på $|z| = 1$ och enligt Rouches sats har $f(z) + g(z)$ lika många nollställe som $f(z)$ innanför $|z| = 1$ nämligen två.

Vidare för $h(x) = x^2 - ae^x$ har man $h(-1) = 1 - ae^{-1} > 0$, $h(0) = -a < 0$ och $h(1) = 1 - ae > 0$. Eftersom h är en kontinuerlig funktion har h minst ett nollställe i varje av intervallen $[-1, 0]$ och $[0, 1]$. Eftersom $h(z) = z^2 - ae^z$ har exakt två nollställe innanför $|z| = 1$ blir de reella.

8. Bestäm den elektrostatiska potentialen $\varphi(x, y)$ (som uttryck i x, y) i området $2\pi/3 <$ $Arg z < \pi$ $(z = x + iy)$ om potentialen på randen är

$$\varphi(x,0) = \begin{cases} V_1, & x < -1, \\ V_2, & -1 < x < 0, \end{cases} \qquad \varphi(x,y) = \begin{cases} 0, & z = x+iy = ae^{i2\pi/3}, a > 1, \\ V_2, & z = x+iy = ae^{i2\pi/3}, 0 < a < 1. \end{cases}$$

Avbildningen $w = z^3$ överför området på övre halvplanet i w-planet $(w = u + iv)$ och dessutom avbildas intervallet $x < -1$, $y = 0$ på $u < -1$, $v = 0$; $-1 < x < 0$, $y = 0$ på $-1 < u < 0$, $v = 0$; $z = ae^{i2\pi/3}$, $0 < a < 1$, på $0 < u < 1$, $v = 0$; och $z = ae^{i2\pi/3}$, $a > 1$, på $u > 1$, $v = 0$. Sök alltså en harmonisk funktion $\Phi(u, v)$, $w = u + iv$, med randvärden $\Phi(u,0) = \begin{cases} V_1, & u < -1, \\ V_2, & -1 < u < 1, \\ 0, & u > 1. \end{cases}$ Man kan ansätta en lösning av formen $\Phi(u, v) = A\text{Arg}(w + 1) + B\text{Arg}(w - 1) + C$, ty den är harmonisk i övre halvplanet $(A\text{Arg}(w + 1) + B\text{Arg}(w - 1) + C = \text{Im}(A\text{Log }(w + 1) + B\text{Log }(w - 1) + iC)$ för reella A, B, C). Vi skall ha $\Phi(u,0) = \begin{cases} V_1 = A\pi + B\pi + C, & u < -1 \\ V_2 = A\cdot 0 + B\pi + C & -1 < u < 1 \\ 0 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C, & u > 1. \end{cases}$ vilket ger $C = 0$, $B = V_2/\pi$ och $A = (V_1 - V_2)/\pi$. Alltså

$$\Phi(u,v) = \frac{V_1 - V_2}{\pi}\text{Arg }(w+1) + \frac{V_2}{\pi}\text{Arg}(w-1)$$

Återkommer man till variablerna x och y får man

$$\Phi(x,y) = \frac{V_1 - V_2}{\pi}\text{Arg }(z^3+1) + \frac{V_2}{\pi}\text{Arg}(z^3-1) =$$

$$\boxed{\frac{V_1 - V_2}{\pi}\text{arccot}\left(\frac{x^3 - 3xy^2 + 1}{3x^2y - y^3}\right) + \frac{V_2}{\pi}\text{arccot}\left(\frac{x^3 - 3xy^2 - 1}{3x^2y - y^3}\right)}$$