

Inlämningsuppgift för Analytiska funktioner E3, 2005:  
Strömnings- och potentialproblem

Studera den gren av  $(z^2 + 1)^{1/2}$  som är analytisk utanför intervallet  $x = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$  på imaginäraxeln och som är positiv på positiva realaxeln ( $z = x + iy$ ). För den som har glömt av hur man gör för att få en sådan funktion följer här en rekapitulation.

Om man skriver  $z - i = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \frac{3\pi}{2}$ ,  $z + i = r_2 e^{i\theta_2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{3\pi}{2}$ , kan man definiera

$$f(z) = (z^2 + 1)^{1/2} = (z - i)^{1/2}(z + i)^{1/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2} = \sqrt{|z^2 + 1|} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}. \quad (1)$$

Detta blir uppenbarligen en analytisk funktion utanför  $x = 0$ ,  $y \leq 1$  på imaginäraxeln (en produkt av analytiska funktioner). På vanligt sätt ser man att  $f(z)$  blir kontinuerlig och analytisk även för  $x = 0$ ,  $y < -1$  (använd (1) med  $\theta_1 = \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$  där). Alltså blir  $f(z)$  analytisk utanför  $x = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Det är en gren av  $(z^2 + 1)^{1/2}$  eftersom  $[f(z)]^2 = z^2 + 1$ . Observera att  $f(z)$  inte kan uppfattas som en sammansättning av gren av kvadratrotfunktionen  $(\cdot)^{1/2}$  och  $z^2 + 1$  (Varför? Tänk hur man väljer en gren av  $(\cdot)^{1/2}$ ). Däremot har man att  $f(z) = z\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}$ , om  $\sqrt{\phantom{x}}$  får beteckna principalroten. Detta är bättre lämpat för praktiska beräkningar av funktionsvärden, t.ex. med hjälp av MATLAB. För att inse detta observera först att  $\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}$  är en väldefinierad och analytisk funktion då  $z$  inte tillhör intervallet  $x = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , ty det är bara på detta intervall som  $1 + \frac{1}{z^2}$  kan bli reellt och  $\leq 0$  (Verifiera!). Därmed är  $f_1(z) = z\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}$  och  $f(z)$  analytiska i samma område, och de är lika för  $z = x > 0$  på realaxeln (det gemensamma värdet är  $f(x) = f_1(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ). Alltså är enligt entydighetssatsen för analytiska funktioner  $f(z) = f_1(z)$  för alla  $z$  utanför  $x = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Detta visar bl.a. att  $f(z)$  är udda, dvs.  $f(-z) = -f(z)$ . [Ett annat, något elementärare, sätt att resonera är följande:  $f(z)$  och  $f_1(z)$  är analytiska och skilda från 0 i samma område och uppfyller där  $[f(z)]^2 = [f_1(z)]^2 = 0$ . Då är  $\varphi(z) = \frac{f(z)}{f_1(z)}$  analytisk och uppfyller  $[\varphi(z)]^2 = 1$  i området. Derivering ger  $2\varphi(z)\varphi'(z) = 0$ , varför  $\varphi'(z) = 0$ . Då är  $\varphi(z)$  konstant i området, och denna konstant kan bara vara 1 eller  $-1$ . Eftersom  $\varphi(x) = 1$  för  $x > 0$ , är konstanten 1, och  $f(z) = f_1(z)$  i hela området.] Man kunde naturligtvis direkt ha definierat  $f_1(z)$  som den önskade grenen av  $(z^2 + 1)^{1/2}$ . Dock är konstruktionen (1) ett vanligt sätt att definiera grenar av  $(z^2 + 1)^{1/2}$ , så den bör man känna till. Den är också lätt att modifiera till andra områden genom att man väljer andra snitt för rotfunktionerna  $(z - i)^{1/2}$  och  $(z + i)^{1/2}$ .

Studera nu hur avbildningen  $w = f(z) = (z^2 + 1)^{1/2} = z\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}$  avbildar området  $D$  utanför snittet  $x = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Det visar sig att man får en ett-ett-avbildning av  $D$  på  $D'$ , som är området utanför  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $v = 0$  i  $w$ -planet ( $w = u + iv$ ). Inversen är den gren av  $(w^2 - 1)^{1/2}$  som ges av  $z = g(w) = w\sqrt{1 - \frac{1}{w^2}}$  i  $D'$  (jämför diskussionen ovan). Till att börja med gäller nämligen att om  $w^2 = z^2 + 1$ , så är  $z$  av formen  $iy$  med  $|y| \leq 1$  om och endast om  $w$  är reell, säg  $w = u$ , med  $|u| \leq 1$ . Därför gäller att  $f(D) \subseteq D'$  och  $g(D') \subseteq D$ . Att  $f$  är en ett-ett-avbildning som avbildar  $D$  på hela  $D'$  och att  $f$  och  $g$  är varandras inverser följer nu av att

$$g(f(z)) = z\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{z^2 + 1}} = z\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}}} = z \quad \text{för alla } z \in D,$$

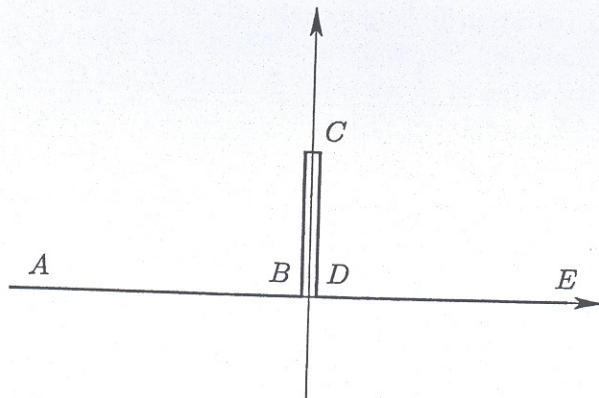
eftersom  $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$  för principalroten, och på samma sätt

$$f(g(w)) = w \quad \text{för alla } w \in D'.$$

Vi vill nu använda denna avbildning för att studera strömning över en plan botten med ett hinder. Låt botten representeras av realaxeln och hindret av snittet  $x = 0, 0 \leq y \leq 1$ . Det gäller nu att  $f(z)$  avbildar övre halvan av  $D$ , dvs. området i  $\text{Im} z > 0$  utanför snittet  $x = 0, 0 \leq y \leq 1$ , på övre halvan av  $D'$ , dvs.  $\text{Im} w > 0$ . Detta följer i stort sett av de angivna egenskaperna hos  $f(z)$ , men verifiera det genom att studera hur randen  $ABCDE$  avbildas. En strömning som är likformig långt bort från hindret, dvs. har en hastighetsvektor som går mot en reell positiv konstant  $V$  då  $|z| \rightarrow \infty$ , motsvaras av en likformig strömning i  $\text{Im} w > 0$ . En sådan har hastighetspotentialen  $\Phi = Aw$ , där  $A > 0$ , om vi glömmer om en konstant term (Varför? Tänk nämligen på frågan vad blir strömfunktionen och den reella hastighetspotentialen om hastighetsvektorn är konstant och parallell med reella axeln). Potentialen i  $z$ -planet är då  $\Phi = Aw = Af(z) = Az\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}$ . Hastighetsvektorn är  $\frac{d\Phi}{dz} = \overline{Af'(z)}$ , där vi har

$$f'(z) = \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}} + z \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}} \left(-\frac{2}{z^3}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}},$$

så att  $\frac{d\Phi}{dz} \rightarrow A$  då  $|z| \rightarrow \infty$ , dvs.  $A = V$ .



**Uppgift 1a.** Läs noga igenom ovanstående så att du säkert förstår hur man konstruerar grenar av  $(z^2 + 1)^{1/2}$  och liknande funktioner. Rita sedan några strömlinjer i  $z$ -planet genom att avbilda motsvarande strömlinjer  $\text{Im} w = k$  med avbildningen  $z = g(w)$ . Tag några olika positiva värden på konstanten  $k$ , några små för att visa strömningen nära hindret och några litet större. Tips: I MATLAB kan en kurva representeras som en vektor av komplexa tal (motsvarande ett antal punkter på kurvan). Om MATLAB-variabeln  $w$  motsvarar en lämplig del av en strömlinje (alltså i detta fall är en vektor med konstant imaginärdel) är det bara att låta MATLAB räkna ut  $z = g(w)$  och sedan skriva `plot(z)`. Använd kommandot `hold on` för att kunna rita flera kurvor i samma figur. Lämnna in MATLAB-koden och en figur som visar hindret och några strömlinjer omkring det.

I nästa uppgift skall vi lösa ett potentialproblem i samma område. Låt nu randen  $ABCDE$  vara en jordad ledare (så att potentialen  $\varphi$  är 0 där) och antag att en punktladdning  $q$  är placerad i punkten  $z_0$  i området. Som förut ger oss avbildningen  $w = f(z)$  motsvarande

problem i halvplanet  $\text{Im } w > 0$ ; alltså en punktladdning  $q$  i  $w_0 = f(z_0)$  med  $\text{Im } w_0 > 0$  och potentialen 0 på randen  $\text{Im } w = 0$ . Detta kan lösas med metoden med "spegelladdning", vilket är ekvivalent med en Möbiusavbildning till enhetscirkeln med laddningen i centrum. Vi avbildar alltså med  $\zeta = \frac{w-w_0}{\bar{w}-\bar{w}_0} = h(w)$  och får problemet att bestämma fältbilden i  $|\zeta| < 1$  från en punktladdning  $q$  i origo då potentialen är 0 på  $|\zeta| = 1$ . Lösningen är uppenbar; den är densamma som för en fri laddning. Den komplexa potentialen är alltså  $\Phi = -\frac{q}{2\pi\epsilon} \log \zeta$ , ekvipotentiallinjerna är koncentriska cirklar  $|\zeta| = \rho$ ,  $0 < \rho < 1$ , och fältlinjerna är strålar från origo.

**Uppgift 1b.** Låt  $A$  och  $B$  vara de två sista siffrorna i ditt personnummer och låt  $z_0$  vara punkten  $z_0 = \frac{A+3}{7} + i\frac{B+10}{8}$ . Rita några ekvipotentiallinjer och fältlinjer i  $z$ -planet. Som i a-uppgiften är det bäst att arbeta med komplexa variabler i MATLAB. Beskriv kurvorna i  $\zeta$ -planet som vektorer av komplexa tal och låt MATLAB räkna ut  $w = h^{-1}(\zeta)$  och  $z = g(w)$ . Några praktiska tips: Undvik strålen med  $\arg \zeta = 0$ , ty  $\zeta = 1$  ger  $z = \infty$ . Delar av randen  $|\zeta| = 1$  hamnar på snittet för rotfunktionen, och avrundningsfel kan göra att man får fel värde på  $\sqrt{1 - \frac{1}{w^2}}$  och därmed på  $z$ . Undvik alltså att ligga precis på randen: på en radie kan  $|\zeta|$  få variera från 0 till t.ex.  $1 - 10^{-6}$ . Lämna in MATLAB-koden och en figur som visar ekvipotentiallinjer och fältlinjer i  $z$ -planet.

I a-uppgifterna kunde vi också ha studerat strömningen runt hindret  $x = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$  (utan någon "botten"), med villkoret att strömningen för stora  $|z|$  skall bli parallell med  $x$ -axeln. Lösningen hade varit densamma. Allmänt gäller att om skall studera strömningen runt ett hinder representerat av ett begränsat område  $K$ , så försöker man avbilda området utanför  $K$  på området utanför intervallet  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $v = 0$  i  $w$ -planet så att strömningen för stora  $|w|$  blir parallell med realaxeln. Lösningen är då densamma som för en likformig strömning (utan hinder) parallell med realaxeln, ty om man inför en fast vägg längst en strömlinje (i det här fallet snittet  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $v = 0$ ) så ändras inte strömningsbilden. Hastighetspotentialen i  $w$ -planet blir alltså  $\Phi = Aw$ , där  $A > 0$ . Vi skall nu se hur man kan lösa detta för några andra hinder  $K$ , först en cirkel och sedan en mer realistisk vingprofil.

De sistnämnda problemen kan lösas med hjälp av funktioner  $J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ , som ofta kallas Joukowski-funktionen efter en rysk aerodynamiker. Låt oss studera denna funktions avbildningsegenskaper. Låt  $z = e^{i\theta}$ ,  $w = u + iv = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{1}{2}(re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta})$ . Då är

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta,$$

$$v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta,$$

Välj  $r > 1$  fixt. Då avbildas cirkeln  $|z| = r$  på ellipsen

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

där  $a = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$ ,  $b = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})$ . Ellipsens brännpunkter är  $\pm c$ , där  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$  oberoende av  $r$ . Då  $r$  avtar mot 1, krymper ellipsen mot intervallet  $[-1, 1]$  på realaxeln. Då  $r$  växer från 1 mot  $\infty$ , sveper cirkelarna  $|z| = r$  över området  $|z| > 1$ . Ellipsernas halvaxlar  $a$  och  $b$  växer också mot  $\infty$ , och ellipserna sveper över området utanför intervallet  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $v = 0$ . Funktionen  $J(z)$  ger alltså en ett-ett-avbildning mellan området  $|z| > 1$  och området utanför  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $v = 0$  (ett uppskuret  $w$ -plan). Detta kommer också att visas nedan på ett

litet striktare sätt. Eftersom  $z$  och  $\frac{1}{z}$  avbildas på samma punkt, så har vi också en ett-ett-avbildning mellan  $|z| < 1$  och det uppskurna  $w$ -planet. Vi ser också t.ex. att området  $|z| > 1, \operatorname{Im} z > 0$  avbildas på  $\operatorname{Im} w > 0$ . Funktionen kan alltså användas för att beskriva strömningen runt en cirkel (se också övning 8.6:8 i boken).

Vi såg ovan att  $J(z)$  är en ett-ett-avbildning mellan vissa områden. Vi vill beräkna inversen och löser därför ekvationen  $2w = z + \frac{1}{z}, z^2 - 2wz + 1 = 0$  med den formella lösningen

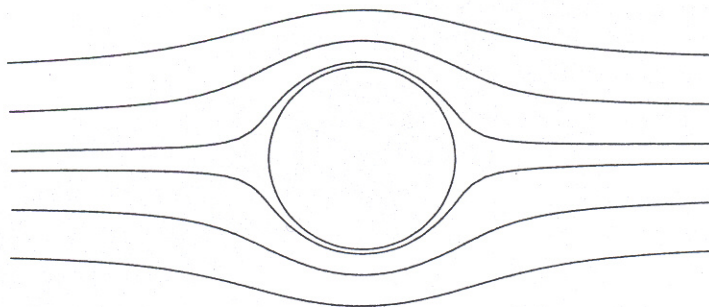
$$z = w \pm (w^2 - 1)^{1/2}.$$

Frågan är dock vilken gren av  $(w^2 - 1)^{1/2}$  som skall väljas. Det kan man komma fram till på olika sätt. Ett sätt (som också ger ett bevis för den ovan beskrivna avbildningsegenskapen) är följande. Inför variablerna  $z_1 = \frac{z-1}{z+1}$  och  $w_1 = \frac{w-1}{w+1}$ . Då motsvarar området  $|z| > 1$  det högra halvplanet  $\operatorname{Re} z_1 > 0$ , och området utanför  $-1 \leq u \leq 1, v = 0$  motsvarar  $w_1$ -planet uppskuret utefter negativa realaxeln (kontrollera!). Sambandet  $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  övergår i  $w_1 = z_1^2$ . Det är då klart att  $z_1 = \sqrt{w_1}$ , där  $\sqrt{\phantom{x}}$  betecknar principalgrenen (Obs!  $\operatorname{Re} z_1 > 0$ ). Vi får

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 + \sqrt{w_1}}{1 - \sqrt{w_1}} = \frac{(1 + \sqrt{w_1})^2}{1 - w_1} = \frac{1 + w_1 + 2\sqrt{w_1}}{1 - w_1} \\ &= \frac{1 + \frac{w-1}{w+1} + 2\sqrt{\frac{w-1}{2+1}}}{1 - \frac{w-1}{w+1}} = w + (w+1)\sqrt{\frac{w-1}{w+1}}. \end{aligned}$$

Den sista termen, som är analytisk utanför  $-1 \leq u \leq 1, v = 0$ , har kvadraten  $w^2 - 1$ , och är alltså en gren av  $(w^2 - 1)^{1/2}$ . Då den har värdet  $\sqrt{u^2 - 1}$  för  $w = u > 1$ , är den identisk med  $g(w) = w\sqrt{1 - \frac{1}{w^2}}$  som infördes ovan. Vi har därmed fått ett tredje sätt att beräkna denna gren av  $(w^2 - 1)^{1/2}$ . Så vi har alltså  $z = J^{-1}(w) = w + g(w)$ .

Med hjälp av detta kan man nu lätt rita några strömlinjer runt  $|z| = 1$ . Resultatet visas i nedanstående figur.



Om man använder Joukowski-avbildningen och avbildar cirklar som ligger "nära" enhetscirkeln kan man få bilder som liknar en vingprofil. Nu vill vi ha vingprofilen i  $z$ -planet, så vi tittar på avbildningen  $z = J(s) = \frac{1}{2}(s + \frac{1}{s})$ . Prova med cirklar  $|s - c| = r$ , där  $c$  kan vara t.ex.  $0.1, 0.1 + 0.1i, 0.1 + 0.2i$ , och  $r = |c + 1|$  (så att cirkeln går genom  $s = -1$ ) eller  $r = |c + 1| + 0.05$  (så att  $s = -1$  ligger strax innanför cirkeln). Använd kommandot axis ('equal') för att få lika skalning av axlarna. Vi väljer dock  $r = |c| + 1.05$  så att cirkeln  $|s - c| = r$  säkert ligger utanför enhetscirkeln. Då ger  $s = J^{-1}(z) = z + g(z)$  en ett-ett-avbildning mellan området utanför vingprofilen och området  $|s - c| > r$ . En translation och

skalning  $\zeta = \frac{1}{r}(s - c)$  ger oss området  $|\zeta| > 1$ . En ytterligare Joukowski-avbildning  $w = J(\zeta)$  ger oss så enligt ovan området utanför snittet  $-1 \leq u \leq 1, v = 0$ . enligt föregående diskussion är linjerna  $v = k, k$  konstant, strömlinjer för en likformig strömning i området.

**Uppgift 1c.** Läs och begrunda ovanstående om Joukowski-funktionens egenskaper. Tag  $c = \frac{5+B}{100} + i\frac{10+B}{100}$  ( $B$  sista siffran i ditt personnummer) och  $r = |c| + 1.05$ . Rita vingprofilen i  $z$ -planet och ett antal strömlinjer runt den. Återigen är det bäst att börja med en vektor  $w$  med konstant imaginärdel och låta MATLAB räkna ut  $\zeta = J^{-1}(w) = w + g(w), s = r\zeta + c, z = J(s) = \frac{1}{2}(s + \frac{1}{s})$  och sedan plotta  $z$ . Lämna in MATLAB-kod och figur.