Inlämningsuppgift 1 för Analytiska funktioner E3: Avbildningar och ett potentialproblem

0. Bakgrund

MATLAB (matrix laboratory) var ursprungligen ett användarvänligt interface till linjäralgebrarutiner ur LINPACK och EISPACK (Fortranrutiner) avsett för undervisning i numerisk analys. Denna kärna finns fortfarande tillgänglig gratis. Senare versioner (PC-matlab, Pro-Matlab) har många fler rutiner och lättanvänd grafik. Ur vår synpunkt är en av de största fördelarna att det mesta fungerar lika bra för komplexa tal som för reella. Vid användning av Matlab skall man i görligaste mån hantera sina data som vektorer eller matriser. En irriterande kvarleva från undervisningssyftet är att defaulten är att alla svar skrivs ut. (Den som sett 10000 komplexa tal bläddra förbi inser inser till fullo att man bör avsluta instruktioner med semikolon för att slippa detta.) För detaljerad syntax skriv `help` kommandonamn. Användning av helpfunktionen rekommenderas varmt.

1. Avbildning av figurer

Några användbara konturer:

`t = 0 : 0.02 : 1;` Skapar en vektor av tal mellan 0 och 1 med steg 0.02. (Titta på den med `t` om Du vill.)

`s1 = t;`

`s2 = 1 + i * t;`

`s3 = fliplr(t + i);` ”flip left-right”.

`s4 = fliplr(i * t);`

`q = [s1 s2 s3 s4];` Sätter samman till en kvadrat.

`plot(q);` Låter Dig se kvadraten. (Plotkommandot drar linjer mellan elementen i vektorn i tur och ordning.)

På grund av automatskalningen är bilden föga upphetsande. Skala om axlarna (se `help axis`):

`axis([−5, 5, −5, 5]), axis square`

`k = q + 1 + i;` Flytta kvadraten.

`z = exp(2 * pi * i * t);` Enhetscirkeln.

`u = 5 * exp(pi * i * (t + 0.5));` Halvcirkel i vänstra halvplanet.

`s = [u, 10 * i * (t − 0.5)];` ”Halvmåne”.

Avbilda ovanstående konturer med några standardfunktioner, z^2, e^z, $(z+1)/(z-1)$. Försök att förutse vad det kan bli, innan Du tittar på resultatet.

`plot(q.^2);` Glöm inte punkten för elementvis (punktvis!) kvadrering.

`plot(exp(q));`

`plot((q + 1)./(q - 1));`

osv. för k, z, u och s.

Avbilda några cirklar med avbildningen $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$:

```
ze = z;
z = 1.1 * ze; plot(0.5 * (z + 1./z)), axis([-2, 2, -2, 2]), grid
z = 1.05 * ze; plot(0.5 * (z + 1./z)), axis([-2, 2, -2, 2]), grid
z = 0.05 + 1.05 * ze; plot(0.5 * (z + 1./z)), axis([-2, 2, -2, 2]), grid
z = 0.05 + 0.1 * i + 1.12 * ze; plot(0.5 * (z + 1./z)), axis([-2, 2, -2, 2]), grid
```

Påminner den sista figuren om något?

2. Real- och imaginärdel

3-dim plottar fås så här. Skapa med `meshgrid` (äldre versioner `meshdom`) matriser av x- och y-värden (`help meshgrid`). Tag t.ex. $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$. Plotta med `mesh`.

```
[x, y] = meshgrid(-2 : 0.02 : 2, -2 : 0.02 : 2);
z = x + i * y;
w = z.^2;
mesh(real(w));
mesh(imag(w));
```

För att få axlarna korrekt markerade, skriv

```
mesh(x, y, real(w));
```

Belopp (`abs(w)`) och argument (`angle(w)`) plottas på samma sätt.
Gör likadant för `w = exp(z)`. Nivåkurvor kan erhållas med kommandot `contour`.

3. Ett potentialproblem

Bestäm fältet mellan två långa parallella ledare med centrumavstånd 1m och radie 0,1m, den ena jordad och den andra med potentialen 10V. Detta löses genom att man hittar en harmonisk funktion (realdelen till en analytisk) som är noll på randen till den ena ledarens tvärsnitt och 10 på randen till den andra.

Detta problem löser man genom att transformera till en lättare geometri. Avbildning 23 i Beta, sid. 346, gör detta. Om z ligger i området utanför två cirklar ligger $w = (z-a)/(1-az)$ i området mellan två koncentriska cirklar (a och R bestäms av givna dimensioner). I området mellan cirklarna är $A \ln |w| + B$ en harmonisk funktion, och A och B kan väljas så den blir 0 på ena cirkeln och 10 på den andra. Den sökta potentialfunktionen är

$$\mathtt{u} = \mathtt{A} * \mathtt{log}(\mathtt{abs}(\mathtt{w})) + \mathtt{B};$$

där z har valts som i 2 fast i ett område som innehåller det intressanta området. Titta på `mesh(u)`. Det mest upplysande är nog att titta på `contour(u)` med nivåkurvor på specificerade ställen mellan 0 och 10V (se `help contour`). (OBS att u är harmonisk även inuti ledarna, men där är potentialen konstant.)

LÄMNA IN EN SÅDAN BILD för godkänt.

Tag gärna med några flödeslinjer också (`contour(v)`, där v är det harmoniska konjugatet) för att se att de blir vinkelräta mot ekvipotentiallinjerna.