

**Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 2000-01-12, kl 8.45-12.45****Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa**Telefon:** Anders Logg, tel. 0740-459022**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.  
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Låt  $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$  vara en Boolesk algebra och  $x, y, z \in M$ .  
Visa att  $x' \cdot y \cdot z' + x \cdot y' \cdot z = (x \oplus y) \cdot (y \oplus z)$ .  $[x \oplus y = x \cdot y' + x' \cdot y]$  (3p)
2. Det finns en lista med 30 teorifrågor till del A, tre av dem kommer på tentan.  
Hur många tentor kan man göra som skiljer sig i minst en teorifråga? (3p)
3. Beräkna arean av triangeln med hörnpunkterna  $(1,2,3)$ ,  $(2,1,2)$  och  $(-1,2,1)$ . (4p)
4. Låt  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  och  $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \\ -4 & 3 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$ .  
a) Beräkna  $\det(A)$  (3p). b) Lös ekvationen  $AX = B$  (5p). (8p)
5. Visa att  $D^n \cos(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$  för alla  $n \in \mathbb{N}$ . (6p)
6. Rita funktionskurvan  $y = 2 \arctan x + \arctan \frac{2x}{x^2 - 1}$ . (4p)
7. Låt  $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{|x|} \ln \sqrt{|x|}, & \text{då } x \neq 0 \\ 0, & \text{då } x = 0 \end{cases}$ .  
a) Är  $f$  kontinuerlig? Är  $f$  deriverbar? (3p)  
b) Rita funktionskurvan  $y = f(x)$  med angivandet av extrempunkter och konvexitet/konkavitet. (6p)
8. Visa att funktionen  $f(x) = \frac{\sinh x}{2 + \cos x}$  är injektiv och beräkna  $Df^{-1}(\sinh \pi)$ . (6p)
9. a) Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt  $a$  så är den kontinuerlig i  $a$ . (2p)  
b) Formulera och bevisa Rolles sats. (5p)

**Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 1999-01-13, kl 8.45-12.45****Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa**Telefon:****OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.  
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Låt  $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$  vara en Boolesk algebra och  $x, y, u, v \in M$ .

$$\text{Sätt } a = (x \oplus y) + (u \oplus v), \quad b = (x + y) \oplus (u + v).$$

$$\text{Visa att } a \cdot b = x \cdot y' \cdot u' \cdot v' + y \cdot x' \cdot u' \cdot v' + u \cdot x' \cdot y' \cdot v' + v \cdot x' \cdot y' \cdot u'.$$

$$[x \oplus y = x \cdot y' + x' \cdot y, \text{ "binär evaluering" godtas ej som bevis!}] \quad (3p)$$

2. Visa att för alla  $N \in \mathbb{N}$  gäller  $\sum_{k=1}^N k \cdot k! = (N+1)! - 1$  [ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ ]. (4p)

3. Givna är planen  $\pi_1: x + 2y + z = -1$ ,  $\pi_2: 3x - 2y + z = -1$ .

- a) Visa att planen  $\pi_1, \pi_2$  är vinkelräta mot varandra. (2p)

- b) Bestäm ett plan  $\pi_3$  som innehåller punkten  $(1, -2, 0)$  och är vinkelrätt mot  $\pi_1$  och mot  $\pi_2$ . (3p)

- c) Bestäm skärningspunkten mellan planen  $\pi_1, \pi_2$  och  $\pi_3$ . (2p)

4. För vilka reella tal  $a$  är matrisen  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 & -1 \\ a+2 & 0 & a-1 & 3 \\ 1 & a-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  inverterbar? (4p)

5. Beräkna arean av det område i  $xy$ -planet som begränsas av kurvorna

$$y = \frac{x - x^2}{x^3 + x^2 + x + 1} \quad \text{och} \quad y = \sin(\pi(x-1)), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (5p)$$

6. Betrakta funktionen  $f(x) = \frac{\sinh(x)}{1+|x|}$ .

- a) Visa att  $f$  är injektiv och beräkna  $Df^{-1}\left(\frac{3}{4+\ln 16}\right)$ . b) Är  $f$  deriverbar? (5+3p)

7. Man vet att  $D_f = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $f(0) = 0$  och  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\tan^2(x)}}$  för  $|x| < \frac{\pi}{4}$ .

- a) Bestäm  $f$  och  $V_f$ . b) Var är  $f$  konvex resp. konkav? (6+3p)

8. a) Definiera  $\lim_{x \rightarrow a} = A$ . b) Visa att  $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = 0$ . (2+3p)

- c) Formulera och bevisa Rolles sats. BB (5p)

**Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del A, 1998-10-23, kl 8.45-12.45****Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa**Telefon:****OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.  
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

- =====
1. Låt  $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$  vara en Boolesk algebra. Visa att för  $x, y \in M$  gäller:
    - a)  $x + y = (x \cdot y) + (x \oplus y)$ .      [  $x \oplus y = x \cdot y' + x' \cdot y$ ,
    - b)  $x \cdot y = (x + y) \cdot (x \oplus y)'$ .      "binär evaluering" godtas ej som bevis! ]      (4p)
  
  2. a) Beräkna  $A^t A$  och  $AA^t$  då  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .      (3p)
  - b) Bestäm  $a$  så att planen  $\pi_1: x + 2y + z = 1$ ,  $\pi_2: 3x + 3y + az = 6$  och  $\pi_3: 2x + 5y - z = 1$  skär varandra längs en linje och ange denna linje.      (5p)
  
  3. a) Visa att  $\cosh x + \cos x > 2$  för alla  $x \neq 0$ .      (4p)
  - b) Hur många lösningar har ekvationen  $\cosh x - \cos x = x^2 + 1$ ?      (4p)
  - c) Visa att funktionen  $\cosh x - \cos x - x^2$  är konvex.      (1p)
  
  4. Låt  $f(0) = a$  och  $f(x) = x^{\sin x}$  då  $x > 0$ .
    - a) Bestäm  $a$  så att  $f$  blir kontinuerlig på  $[0, \infty)$ .      (3p)
    - b) Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan  $y = f(x)$  i punkten  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .      (3p)
  
  5. a) Bestäm en primitiv funktion till  $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{x}}$ .      (4p)
  - b) Bestäm en primitiv funktion till  $\frac{1}{\cosh x}$ .      (3p)
  - c) Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan  $y = \frac{1}{\cosh x}$  och linjen  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .      (3p)
  
  6. Definiera skalära produkten av två geometriska vektorer och härled en formel för beräkning av denna i ett ON-system.      (4p)
  
  7. Definiera funktionerna  $\ln x$  och  $e^x$  och härled formeln  $De^x = e^x$ .      (5p)
  
  8. Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessatsen.      (4p)

BB

**Tentamen i matematik E1, del A, 94-09-02, kl 8.45-12.45**

**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa

**Telefon:** Hans Sandquist, ankn 5321.

**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad !

=====

1. Låt  $a_0 = 2, a_1 = 5$  och  $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$  för  $n \in \mathbb{N}$ .  
Visa med induktion att  $a_n = 2^n + 3^n$  för alla  $n \in \mathbb{N}$ . (6p)

2. Visa att  $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$ .  
[Med denna formel beräknade *J.Machin* ( $\sim 1705$ )  $\pi$  med 100 decimaler !]. (6p)

3. Bestäm en primitiv funktion till  
a)  $\frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x^3 + 1}}$  (4p)      b)  $\frac{\sin(x)\cos^3(x) + \sin^3(x)\cos(x)}{\sin^4(x) + \cos^4(x)}$  (3p) (7p)

4. Visa att funktionen  $f(x) = x^2 - 1 - 2x \ln(x)$   
är injektiv och bestäm värdemängden  $V_f$ . (6p)

5. Låt  $f(x) = \sqrt{1 - \ln^2 x}$ .  
a) Rita kurvan  $y = f(x)$  (ange extrempunkter; visa att kurvan är strängt konkav). (6p)

- b) Låt  $D$  vara det område i  $xy$ -planet, som begränsas av kurvan  $y = f(x)$  och  $x$ -axeln och  $m(D) = \text{arean av } D$ .

Visa  $m(D) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) e^{\sin(t)} dt$  och  $\frac{e^2 - 1}{2e} < m(D) < \frac{e^2 - 1}{e}$ . (5p)

6. Beräkna  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos(x)}}{x \ln(1 + x)}$ . (4p)

7. Visa att  $\int_a^b f(x) dx$  är konvergent om  $\int_a^b |f(x)| dx$  är konvergent. (4p)

8. Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats. (6p)

BB

**Tentamen i matematik E1, del A, 94-10-31, kl 8.45-12.45**

**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa

**Telefon:**

**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt personnummer på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad !

=====

1. Visa med induktion att  $\sum_k^N (3k^2 - 1) = N^3$  för alla naturliga tal  $N$ . (5p)

2. Konstruera kurvan  $y = \frac{1}{x} + 2 \arctan(x)$  med angivandet av extrempunkter, asymptoter, konvexitet och konkavitet. (6p)

3. Bestäm en primitiv funktion till  $\frac{\sin^3(x) + \sin(x)}{\cos^3(x) + \cos(x)}$ . (5p)

4. Låt  $f(x) = \frac{\cosh(x) - x \sinh(x)}{(\cosh(x))^2}$ .

a) Visa att  $f$  har ett nollställe i  $(1, \frac{3}{2})$ . (2p)

b) Beräkna  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . (2p)

c) Beräkna  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(x) dx$ . [Ledn: integrera partiellt  $\int \frac{1}{\cosh(x)} dx$ ] (5p)

5. Låt  $f(x) = x \ln(e^{\sin(x)} \sin(|x|))$  då  $x \neq 0$  och  $f(0) = 0$ .

a) Visa att  $f$  är kontinuerlig i 0. (3p)

b) Är  $f$  deriverbar i 0? (2p)

c) Beräkna  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ . (4p)

6. Hur många lösningar har ekvationen  $\ln((a \cos(x))^2) + 4 \cos(x) + 3x^2 = 0$  i intervallet  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $(a \in \mathbb{R})$ ? (6p)

7. Definiera funktionen  $\arctan(x)$  och härled ett uttryck för dess derivata. (4p)

8. Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats. (6p)

BB

**Svar till tentorna i matte del A för E1 (ht 2000)**

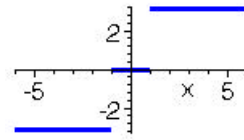
**00-01-12**

2) 4060    3)  $\sqrt{6}$     4a) 1    b)  $X^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

7a)  $f$  är deriverbar (därmed kontin.)    b)  $(0,0)$  är terasspunkt, max/min-pkt:  $\pm(e^{-\frac{2}{3}}, e^{-\frac{2}{3}})$ ,  $f$  är konvex i  $[-e^{-\frac{8}{3}}, 0] \cup [e^{-\frac{8}{3}}, \infty)$ , konvex i  $(-\infty, -e^{-\frac{8}{3}}] \cup [0, e^{-\frac{8}{3}}]$



6)



8)  $\frac{1}{\cosh \pi}$

**99-01-13**

3b)  $2x + y - 4z = 0$     b)  $-\frac{1}{21}(8,4,5)$     4)  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$     5)  $\frac{8+\pi^2-4\pi \ln 2}{4\pi}$

6a)  $Df^{-1}\left(\frac{3}{4+4\ln 2}\right) = \frac{4(1+\ln 2)^2}{2+5\ln 2}$     b) ja    7a)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2} \sin x)$ ,  $V_f = [-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2\sqrt{2}}]$

b) konvex på  $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ , konvex på  $[0, \frac{\pi}{4}]$  (b) kan lösas utan a) !)

**98-10-23**

2a)  $A^t A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 5 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $AA^t = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}$     b)  $a = 12$ ,  $l: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$     3b) 2

4a)  $a = 1$     b)  $y = x$     5a)  $\arctan \sqrt{x} + \frac{1}{2}(\ln(1+\sqrt{x}) - \ln(\sqrt{x}-1))$     b)  $2 \arctan e^x$     c)  $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ln 3$

**94-09-02**

3)  $\frac{2}{3}(\sqrt{x^3+1} + \ln(\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^3}))$     b)  $\frac{1}{2} \arctan(\tan^2 x)$     5) grafen: min:  $(\frac{1}{e}, 0), (e, 0)$  max:  $(1, 1)$     4)  $V_f = (-1, \infty)$     6) 0.25

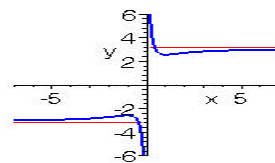
**94-10-31**

2) max/min:  $\pm(1, 1 + \frac{\pi}{2})$ , asymptoter  $x = 0, y = \pm\pi$

$f$  är konvex i  $(-\infty, -\sqrt{1+\sqrt{2}}] \cup (0, \sqrt{1+\sqrt{2}}]$ ,  
konvex i  $[-1, 0) \cup [\sqrt{1+\sqrt{2}}, \infty)$

3)  $\ln(\cos^2 x) - \frac{3}{2} \ln(\cos^2 x + 1)$     4b) 0    c) 0    5b) nej    c) 2

6)  $|a| < e^{-2}$  : 0 lösn.,  $|a| = e^{-2}$  : 1 lösn.,  $|a| > e^{-2}$  : 2 lösn.



Lycka till!

Bernhard