Datorlaborationer i matematiska metoder E1, del A (TMA042), ht 2000

- Till varje matematikkurs ges datorlaborationer i *Maple* och *MATLAB* (i del A bara *Maple*). Syftet är att du skall bekanta dig med och börja använda dessa program för att öka förståelsen för det du just håller på med i matten, men även för att kunna utnyttja dem senare (inte bara imatte-kurser).
- Uppgift 1 och 3 kan ge 1 bonuspoäng var vid tentamina i matematiska metoder för E1 del A, 20/10, 10/1 och 20/8, uppgift 2 är obligatorisk för kursen "datoranvändning" och skall göras på schemalagd tid lv 5 (v 39) med handledare som bedömer den direkt.
- Dela upp laborationen: uppg. 1a)-c) kan du sätta i gång med omedelbart, uppg. 1d),e) och uppg. 3 bör du göra lv 6/7.
- Uppg. 1 och 3 skall lämnas till mig senast fr, 13/10, kl 9^{45} (efter föreläsningen). Häfta ihop lösningarna, skriv namn och personnummer <u>längst upp</u> <u>på varje inlämnat</u> blad, <u>blad utan namn eller utan personnummer beaktas ej</u>. Laborationen lämnas tillbaka med del A-tentan.

Uppgift 1 (olikheter, Boolesk algebra, kombinatorik)

a) För vilka reella x gäller $|x+1| > |x-2|$?

b) För vilka reella x gäller $x+6 \geq \dfrac{20}{3-x}$?

c) Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra, $x, y, z \in M$.
Visa $x + x \cdot y \cdot z + x' \cdot y' = x + y'$ och $(x+y') \cdot (x+z') = x + y' \cdot z'$
genom att använda *bsimp* på vänsterledet.
Bestäm även den konjunktiva och den disjunktiva normalformen för vänsterledet.

d) Beräkna $5!$, $49!$, $\binom{7}{3}$, $\binom{39}{7}$, $\binom{210}{30}$ och $\dfrac{210\,!}{(30!)^7}$.

e) Bestäm och faktoruppdela den konstanta termen i utvecklingen av $\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}\,x} - \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}\,x}} \right)^{25}$.

Upgift 2 (funktioner, gränsvärde, derivata)

a) "Lita aldrig på figurer" (vp4):

Låt $f(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt{x}\,ln\,x + \dfrac{sin\,x}{\sqrt{x}} + \dfrac{7\sqrt{x}}{3}$ för $x > 0$ och $f(0) = 0$.

a1) Rita kurvan $y = f(x)$ för $0 < x < 40$, för $0 < x < 16$ och för $0 < x < 1$.
Då tror du väl att f är injektiv? Nix! Rita kurvan även för $0 < x < 0.0001$!

a2) Beräkna $f(1)$, $f'(x), f'(1)$, $\lim_{x \to 0+} f(x)$ och $\lim_{x \to 0+} f'(x)$.

b) "Lita inte alltid på maple":

Låt $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 1$.

b1) Rita kurvan för $-9 < x < 9$ (snyggt, va ?).

b3) Visa <u>med datorn</u> att f är jämn, kontinuerlig i 0 och har x-axeln som asymptot.

b4) Avgör med datorn om f är deriverbar i $\frac{\pi}{2}$.

b5) Rita kurvan $y = f'(x), -9 < x < 9$ och motivera att f antar sitt största värde i 0.

c) "Låt maple hjälpa dig ...":

Låt $f(x) = \sqrt{\tfrac{1}{2} + x - x^2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{1+4x}}$ och $g(x) = \sqrt{\tfrac{1}{2} + x - x^2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{1+4x}}$.

c1) Bestäm D_f och D_g.

c2) Rita kurvorna $y = \pm f(x), x \in D_f$ och $y = \pm g(x), x \in D_g$ i samma diagram.

<u>Upgift 3 (integral)</u>

a) Beräkna $\displaystyle\int \frac{ax+b}{\sqrt{3+x^2}}\,dx$, $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln x^2}{x^2} \right) dx$ och $\displaystyle\int_1^t \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln x^2}{x^2} \right) dx$.

b) Låt $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^6 - x^5 - 3x^4 + x^3 + 2x + 4}$.

b1) Partialbråksuppdela $f(x)$.

b2) Beräkna mha *maple* en primitiv funktion F till f och rita grafen $y = F(x)$ för $-6 < x < 8$. Vilken primitiv funktion fick du?

c) Beräkna arean av det område som omslutes av kurvorna i uppgift 2c).

d) Låt $f(x) = 3x(x-2)\left(1 - e^{-x} x^2 \cos(3\sqrt{x}) \sin(x)\right) \ln\left(2 - \frac{x}{\pi}\right)$.

d1) Rita grafen till f för $0 \le x \le \pi$ och tre Riemannsummor $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ till f i ett diagramm: Välj n lika långa delintervall, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, och $\xi_k = x_{k-1}$ (vänstra randpunkten), resp. $\xi_k = x_k$ (högra randpunkten), resp. $\xi_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$ (mittpunkten) $(k = 1 \cdots n)$.

d2) Beräkna Riemannsummorna i d1) för $n = 37$, för $n = 237$ och ”mittsumman” även för $n = 2222$; jämför sedan dessa värden med *maple*:s värde av $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

Ger Riemannsummor en bra approximation av bestämda integraler?

Anvisningar, anmärkningar, ledningar:

A. Allmänt

- Uppgifterna skall göras med *maple* (eller *mathematica*). Lämna in hela ditt "worksheat" (alla kommandon)! Skriv ditt namn och ditt personnummer med *maple* på första sidan längst upp, sedan direkt bredvid "uppgift1" och bredvid "uppgift3". I PC-versionen kan du se var *maple* bryter sidor: *arkiv: Print Preview*!
  OBS: du skall alltid kommentera alla dina lösningar/resultat (gärna för hand)!
- Förbered dig noggrant innan du sätter dig vid datorn. Sedan kan du sätta igång ganska omedelbart: gå igenom bifogade exemplen först, de innehåller allt vad du behöver (och litet till). Är du osäker på något, så läs den utförliga on-line-hjälpen i *maple*, som du får med ?, prova t.ex. ?*plot*, eller ?*D*, eller varför inte ??. Ändå fiffigare: tryck helt enkelt ctrl och F1, så kommer on-line-hjälpen om det ord cursorn står på eller precis efter (eller klicka på "Help").
- Några allmänna tips för *maple*: Ett bra sätt att skriva in funktioner är att ange den "elementvisa tillordningen" $f\,:\,x \mapsto f(x)$, då är det sedan enkelt att beräkna *f(a)*, *f'* och *f'(a)*. Öva in det med sinusfunktionen, skriv in det, kolla *maples* output (se även ex2, f.f.a. tillägg 3):

```
>f:=x->sin(2*x);
>f(Pi/3);
>D(f);
>D(f)(Pi/3);
```

- Figurerna kan du förse med en titel (*title* = `*din text*`, obs: fnuttar !), rita noggrannare (*numpoints* = *n*, $n \in \mathbb{N}$, default är $n = 50$, se tillägg 4), tjockare (*thickness* = *m*, $m \in \{0,1,2,3\}$) och med annan färg (*color* = ...), läs ?*plot*[*options*] ! Rita gärna med *animatecurve* (finns i plotpaketet >*with*(*plots*)). Markerar du då grafen så får du upp en verktygsrad där du kan "spela upp" grafen, välja hastighet, riktning m.m…!

B. Till uppgifterna

1) **a),b)** Olikheter (och ekvationer) löser du med >*solve*, se ex2. Absolutbeloppet skrives *abs*.

c) Ladda in logik-paketet (>*with*(*logic*)). Operatorerna $+\,,\cdot\,,'$ skriver du *&and*, *&or*, *&icke*, med >*bsimp*(*expr*) förenklar du sedan uttrycket *expr*, du kan också få ditt uttryck på "kanonisk form" (disjunktiv, resp. konjunktiv normal form med *DNF*, resp. *CNF*), se ex1.

d) Fakultet beräknar du med !, binomialkoefficienterna med *binomial* som finns i kombinatorik paketet (laddas in med >*with*(*combinat*)). Se ex1. Räkna ut 5! och "7 över tre" för hand och jämför med *maples* svar! Se ex1.

e) Räknar ut sådana uttryck gör du med *expand*, pröva även *simplify* och *normal*; faktoruppdelning av heltal fås med *ifactor*. Se ex1.

2) **a)** Ta minst 900 "numpoints"!

b) Att *f* är jämn kan du ju "räkna ut" (*f*(*x*) - *f*(-*x*) = ...), men t.o.m. det finns i *maple*: >*type*(*f*(*x*),*evenfunc*(*x*)). Beräkna höger- och vänstergränsvärdet för att vara säker att gränsvärdet existerar; att de är lika, kan du snyggt kolla med "Boolesk evaluering": >*evalb*(*limit*(*f*(*x*),*x=0*,*left*)= *limit*(*f*(*x*),*x=0*,*right*)); $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ får du med >*limit*(*f*(*x*), *x=infinity*). Men obs, *maple* svarar fel! Skriv först om *f* (t.ex. $\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{\sin x}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^2}}$ för *x*>0). b4): du måste kolla om $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$ existerar (kolla höger och vänster-gränsvärde)!! 2b5): du kan beräkna *f*:s största och minsta värde med >*maximize(f(x),x)* resp. >*minimize*(*f*(*x*),*x*); vill du beräkna det största värde som *f* antar på [*a*,*b*], så skriver du >*maximize*(*f*(*x*),*x*,*a*..*b*), infinity tillåtet men inte π. Men här skall du motivera det mha $f\,'>0$, resp <0! Se ex2, ffa tillägg 2 och tillägg 3 där!

c) Försök! *Maple* hjälper dig (D_f = ? Lös olikheterna ”uttrycket under roten 0”). Rita de 4 kurvorna gärna först var för sig (med *animateplot*!), sedan tillsammans mha *display*. Rita 1:1, det kan du klicka fram i efterhand, men bäst är att du skriver in det: >*scaling=constrained*). Det är en välkänd sluten kurva (”kardiod”).

3) Integrerar gör du med >*int*(*f*(*x*),*x*) för obestämd integral, resp. med >*int*(*f*(*x*),*x*=*a*..*b*) för bestämd integral; vill du först "se" din integral, så skriv *Int* i.st.f. *int* och sedan *value*(%). *Maple* räknar fram allmänna (komplexa) lösningar, för att få reellvärda funktioner (och för att kunna rita) måste du skriva om dem, t.ex. $ln|x|$ i.st.f. $ln\,x$; inversa *sinh*-, *tanh*- och *cosh* -funktionerna kan du skriva mha *ln* genom att "convertera" dem: se ex3. Vilken primitiv funktion? Beräkna t.ex. *F*(*1*)!
Partialbråksuppdelningen får du med >*convert*(*f*(*x*),*parfrac*,*x*) !
Ladda in student - paketet, då kan du rita funktioner och de tre efterlysta Riemannsummorna (med >*leftbox*(*f*(*x*),*x*=*a*..*b*,*n*); osv), beräkna Riemannsummorna (med *leftsum*(*f*(*x*),*x*=*a*..*b*,*n*); och sedan >*evalf*...). Se ex3.

<u>Anmärkning:</u> I exempel 2 löser vi följande tenta-uppgift med datorn:

Låt $f(x) = \dfrac{ln(\cos x)}{x^2}$ för $0 \neq x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ och $f(0) = a$. Bestäm a så att f är kontinuerlig i 0.

Det klarar vi även utan datorn: Bara "standardgränsvärden" får (och skall) användas för att beräkna $a = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
Flera "omskrivningar" är möjliga, t.ex.

$$\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \frac{\ln(1+(\cos x - 1))}{x^2} = \frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{\ln(1-2\sin^2\frac{x}{2})(-2\sin^2\frac{x}{2})}{-2\sin^2\frac{x}{2}\cdot x^2};$$ så, nu är det klart, ty

$$\frac{ln(1+h)}{h} \to 1 \;\; då \;\; h \to 0 \;\; (h = -2\sin^2\tfrac{x}{2} \to 0 \;\; då \;\; x \to 0)$$ och $$\frac{-2sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2} \to -\frac{1}{2} \, då\, x \to 0$$

ty $\dfrac{\sin t}{t} \to 1 \;\; då \;\; t \to 0 \cdots \cdot$

LYCKA TILL !

Bernhard