

VECKANS PROBLEM

- Du lär dig väldigt mycket av att prata med andra, att behöva förklara för andra dina idéer, lösningar, vad du gjorde, vad du menade. Lös dessa uppgifter hemma, skriv ner dina lösningar på ett bra sätt och ta med dem till räknestugan. Där skall du "försvara" dem i smågrupp (högst 4 pers.), där skall du också kritiskt titta på de andras lösningar, diskutera dem och allt kringliggande: är lösningen korrekt? fullständig? bra nerskriven? omständlig? är alla använda begrepp/satser klara? Kanske måste ni först gå igenom (delar av) föreläsningen? Tänk på att du måsteträna att formulera dig, att skriva ner en lösning på ett acceptabelt sätt. Uppgifter liknar tentamensuppgifter.
- För denna smågruppsdiskussion är de sista 25 minuterna i angiven räknestuga avsatta. Aktivt deltagande är förutsättning för att få skriva del A tentan.
- Din övningsledare skall fungera som "diskussionsledare" och hjälpa till då gruppen ej kan enas (komma fram till något). Låt honom titta på dina lösningar ("skulle det här duga"). Det är han som bedömer din insats.
- Samtidigt delas ut "repetitionsfrågor"; ta gärna upp dem också i diskussionen, de liknar teorifrågor på tentan, och frågorna på "muntan" efter hela ettans matte.
- Lösningar (ev. med kommentarer och nya frågor) delas ut tidigast veckan efter... .

PROBLEM 1 (lösningen skall vara klar tors 14/9)

Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra, $x, y \in M$ och $x \oplus y = x \cdot y' + x' \cdot y$.

a) Visa: $x + y = x \oplus y \Leftrightarrow x \cdot y = 0$.

b) Gäller $\begin{cases} x + y = x + z \Rightarrow y = z \\ x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z \end{cases}$ resp. $\begin{cases} x + y = x \Rightarrow y = 0 \\ x \cdot y = x \Rightarrow y = 1 \end{cases}$?

Titta först på den speciella Booleska algebran $P(M)$ ("mängdalgebran"), verkar inte påståendet trivialt där? Hur skulle det se ut för utsagor? Men varför duger inte ett bevis med "sanningstabell" (binär evaluering) för det allmänna fallet?

REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del A för E1, 2000

Moment 1: logik, mängdlära, Boolesk algebra, kombinatorik

1. Vad är en matematisk utsaga?
2. Definiera $P \Rightarrow Q$ (P, Q utsagor).
Visa att $P \Rightarrow Q$, $\neg P \vee Q$ och $\neg Q \Rightarrow \neg P$ är ekvivalenta utsagor.
3. Definiera $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$ (A, B mängder).
4. Vad är en Boolesk algebra? Exempel?
5. Vad är mängderna $\emptyset$, $\hat{O}$, $\hat{U}$, $\hat{D}$, $\hat{N}$? Kan du visa att $\sqrt{3} \notin \hat{D}$?
6. Vad är potensmängden $P(M)$? Vad är (den kartesiska) mängdprodukten $A \times B$?
7. Vad är en relation? Vad är en funktion? Vad menas med $f: \underset{x \mapsto y}{X} \rightarrow Y$?
8. Vad är permutation? Fakultet? Binomialkoefficienten? Vad ger de?
9. Vad är vitsen med induktionsaxiomet?

EXTRAUPPGIFTER

1) Låt $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vara en Boolesk algebra och $x, y, z \in M$.

a) Visa **a1)** $x + x \cdot y \cdot z + x' \cdot y' = x + y'$.

a2) $(x + y') \cdot (x + z') = x + y' \cdot z'$.

b) Uttryck $x \cdot y' + x' \cdot y$ m.h.a. enbart $\cdot$ och $'$ (AND-grind och NOT-grind).

c) Visa att $(x \oplus y)' = x' \oplus y = x \oplus y' = x'y' + xy$.

d) Visa med induktion att i en Boolesk algebra $\langle M, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ gäller :

För alla $N \in \mathbb{N}$ gäller $\left(\prod_{k=1}^N x_k \right)' = \sum_{k=1}^N x_k'$ och $\left(\sum_{k=1}^N x_k \right)' = \prod_{k=1}^N x_k'$

$(x_1, x_2, \dots, x_N \in M; \prod_{k=1}^N x_k = x_1 \cdot x_2 \cdots x_N = \text{produkten av } x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Formulera påståendet för utsagor och för mängder (t.ex. $\left(\bigcap_{k=1}^N A_k \right)^c = \bigcup_{k=1}^N A_k^c \dots$).

2) Visa med induktion att $2 \sum_{k=1}^N (-1)^{N+k} k^2 = N + N^2$ för alla $N \in \mathbb{N}$.

3) Beräkna den konstanta termen i utvecklingen av $\left(\frac{\sqrt{2}}{x} + \sqrt{3} x \right)^{10}$ och avgör om den är ett rationellt tal. (svar: $9072\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$)

4) Den övningsgrupp som Emil och Emilia tillhör består av 20 teknologer. Eftersom Emil och Emilia jämt bråkar får de inte sitta bredvid varandra och inte bakom varandra. På hur många olika sätt kan de placeras?
Teknologerna sitter i fem rader, fyra i varje rad. (svar: 318)