

VECKANS PROBLEM

PROBLEM 2 (lösningen skall vara klar tors 21/9)

1) Jag skall visa att för alla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gäller att $2^n = 1$, dvs. att utsagan

$P(n): 2^n = 1$ är sann för alla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jag gör ett induktionsbevis:

I. För $n = 0$ gäller $2^0 = 1$, $P(0)$ är alltså sann.

II. Antag nu att $P(k)$ är sann för alla k t.o.m. något $m_0 \in \mathbb{N}$.

Då är även $P(m_0 + 1)$ sann, ty $2^{m_0+1} = \frac{2^{m_0} 2^{m_0}}{2^{m_0-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1}$ (enl. antagandet).

III: Induktionsaxiomet ger då att $P(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. vsv

Troligtvis är något fel här, men vad? (Denna uppgift lånade jag från M).

2) Vi vet från föreläsningen att varken $\sqrt{2}$ eller $\sqrt{3}$ är ett rationellt tal.

Finns det heltal $m, n, m \cdot n \neq 0$ sådana att $m\sqrt{2} + n\sqrt{3}$ är ett rationellt tal?

Lösningsförslag till VP1

a) Det var ett "om och endast om" påstående (en ekvivalens av två utsagor), det bästa är att visa dem två implikationerna var för sig. Jag skriver xy i.st.f. $x \cdot y$.

" $\Rightarrow$ ": Om $x + y = x \oplus y$ gäller, så är $xy = 0$:

bev: $x + y = x \oplus y \Rightarrow x(x + y) = x(x' y + xy') \Rightarrow x + xy = xy' \Rightarrow x = xy' \Rightarrow xy = 0$
(vi utnyttjade $xx = x, xx' = 0, x + xy = x$) vsv

" $\Leftarrow$ ": Om $xy = 0$ gäller, så är $x + y = x \oplus y$:

bev: $xy = 0 \Rightarrow x + y = x(y + y') + y(x + x') = xy + xy' + yx + yx' = xy' + yx'$
(vi utnyttjade $x + x' = 1, x1 = x$) vsv

Ett annat (naja, mycket liknande) bevis får du med identiteten (visa den!)

$$x \oplus y = (x + y)(xy)'$$

" $\Rightarrow$ ": $x + y = x \oplus y \Rightarrow \underbrace{(x + y)(xy)}_{=xy+yx=xy} = \underbrace{(x \oplus y)(xy)}_{=(x+y)(xy)'(xy)=0} \Rightarrow xy = 0$ vsv

" $\Leftarrow$ ": $xy = 0 \Rightarrow x \oplus y = (x + y)(xy)' = (x + y)0' = x + y$ vsv

Obs: på föreläsningen har vi visat identiteten $x + y = x \oplus y + xy$ (som är ganska självklar för utsagor och för mängder, se uppg. 12g i MA); det ger direkt " $\Leftarrow$ "!

b) Ingen av implikationerna är sann; enkla motexempel fås i en mängdalgebra (jmf. uppg. 11 i MA): För $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{2, 3\}, D = \{1\}$ gäller $A \cup B = A \cup C = \{1, 2, 3\}$ men $B \neq C$, $A \cap B = A \cap D = \{1\}$ men $B \neq D$, $A \cup D = A$ men $D \neq \emptyset$ och $D \cap A = D$ men $A \neq \mathbb{N}$ ($A, B, C, D \in P(\mathbb{N})$).

DUGGA

Lördag 30 september ges en **övningstenta** (kl. 8.45 – 10.45, i mn-salarna).

Det är en viktig del av inläringen. Du får kontroll på hur bra du redan behärskar stoffet och, mycket viktigt även det, hur bra du kan skriva ner dina lösningar.

En övningstenta är en "halv tenta": den består av tre problemuppgifter och en teorifråga som tillsammans kan ge 25p, skrivningstiden är 2 timmar.

För varje 6p på denna tenta får du 1p som läggs till dina poäng på del A tentorna innevarande år (ej senare).

Stoffet meddelas på föreläsningen (se även kursens hemsida), men så här är det tänkt: Förutom moment från förberedande kursen (kvadratkomplettering, visa olikheter, räkna korrekt med potenser och logaritmer) innehåller övningstentan Boolesk algebra, induktionsbevis, gränsvärde, kontinuerliga funktionen, derivatan och de elementära funktionerna.